БИБЛИОТЕКА
R&C Dynamics
РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

В. И. Арнольд
А. Б. Гивенталь

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

13
ТОМ

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

REGULAR & CHAOTIC DYNAMICS

том 13

СЕРИЯ

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

ВЫШЛИ В СВЕТ:

1. *Э. Картан.* Интегральные инварианты (с добавлением В.В.Козлова).
2. *А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко.* Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях.
3. *А. Д. Морозов, Т. Н. Драгунов и др.* Инвариантные множества динамических систем в WINDOWS.
4. *В. В. Козлов.* Общая теория вихрей.
5. *М. Оден.* Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем.
6. *В. В. Голубев.* Талант без почвы.
7. *А. В. Борисов, И. С. Мамаев.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.
8. *Дж. Биркгоф.* Динамические системы.
9. *Э. Уиттекер.* Аналитическая динамика.
10. *В. М. Алексеев.* Лекции по небесной механике.
11. *В. И. Арнольд, А. Авец.* Эргодические проблемы классической механики.
12. *П. Р. Халмош.* Лекции по эргодической теории.
13. *В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь.* Симплектическая геометрия.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

Дж. Гукенхеймер, П. Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.

Г. Зейферт, В. Трельфалль. Вариационное исчисление в целом.

В. В. Козлов. Методы качественного анализа в динамике твердого тела.

Дж. Марсден, Т. Ратью. Введение в механику и симметрию.

А. М. Переломов. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли.

E-mail: borisov@uni.udm.ru
http://www.rcd.com.ru

В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издание второе

Научно-издательский центр
«Регулярная и хаотическая динамика»

2000

УДК 514+515.16

Библиотека *«R & C Dynamics»*
Том 13

Арнольд В. И., Гивенталь А. Б.
Симплектическая геометрия. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000, 168 стр.

Симплектическая геометрия — это математический аппарат таких областей физики, как классическая механика, геометрическая оптика и термодинамика. В этой небольшой книге изложены основные понятия симплектической геометрии. По сравнению с первым изданием 1985 г., вышедшем в ВИНИТИ, в книге исправлены неточности и устранены замеченные опечатки.

Для студентов и аспирантов, математиков, физиков, научных работников.

ISBN 5-7029-0331-5

Содержание

Предисловие

Симплектическая геометрия — это математический аппарат таких областей физики, как классическая механика, геометрическая оптика и термодинамика. Всякий раз, когда уравнения теории могут быть получены из вариационного принципа, симплектическая геометрия проясняет и приводит в систему соотношения между входящими в теорию величинами. Симплектическая геометрия упрощает и делает обозримым устрашающий формальный аппарат гамильтоновой динамики и вариационного исчисления таким же образом, как обычная геометрия линейных пространств сводит громоздкие координатные вычисления к небольшому числу простых основных принципов.

Глава 1
Линейная симплектическая геометрия

§ 1. Симплектическое пространство

1.1. Кососкалярное произведение. *Симплектической структурой* или *кососкалярным произведением* в линейном пространстве называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма. Невырожденность кососимметрической формы влечет четномерность пространства.

Симплектическая структура на плоскости — это форма площади. Прямая сумма n симплектических плоскостей имеет симплектическую структуру: кососкалярное произведение векторов равно сумме площадей проекций натянутого на них ориентированного параллелограмма на n координатных плоскостей.

Линейная «теорема Дарбу» (G. Darboux). *Симплектические пространства одинаковой размерности симплектически изоморфны, то есть существует сохраняющий кососкалярные произведения изоморфизм между этими пространствами.*

Следствие. *Симплектическая структура в $2n$-мерном линейном пространстве в подходящих координатах $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ имеет вид $p_1 \wedge q_1 + \ldots + p_n \wedge q_n$.*

Такие координаты называются *координатами Дарбу*, а пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с таким кососкалярным произведением — *стандартным симплектическим пространством.*

Пример 1. Мнимая часть эрмитовой формы задает симплектическую структуру. В координатах $z_k = p_k + \sqrt{-1}q_k$ в $\mathbb{C}^n$ мнимая часть эрмитовой формы $\sum z_k \bar{z}'_k$ имеет вид $-\sum p_k \wedge q_k$.

Пример 2. Прямая сумма линейного пространства со своим сопряженным $V = X^* \oplus X$ снабжается канонической симплектической структурой $\omega(\xi \oplus x, \eta \oplus y) = \xi(y) - \eta(x)$. Если $(q_1, \ldots, q_n)$ — координаты в X, а $(p_1, \ldots, p_n)$ — двойственные координаты в X^*, то $\omega = \sum p_k \wedge q_k$.

Стандартная симплектическая структура в координатном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ выражается через матрицу $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$, где E_n — единичная $n \times n$-матрица: $\omega(v, w) = \langle \Omega v, w \rangle$. Здесь $\langle v, w \rangle = \sum v_k w_k$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n}$. Умножение на Ω задает комплексную структуру в $\mathbb{R}^{2n}$, так как $\Omega^2 = -E_{2n}$.

1.2. Подпространства. Векторы $v, w \in V$, для которых $\omega(v, w) = 0$, называются *кососортогональными.* Для любого подпространства симплектического пространства определено его *косоортогональное дополнение,* которое, в силу невырожденности кососкалярного произведения, действительно имеет дополнительную размерность, но, в отличие от евклидова случая, может пересекаться с исходным подпространством. Так, кососкалярный квадрат любого вектора равен нулю, поэтому косоортогональное дополнение прямой — гиперплоскость, содержащая эту прямую. Обратно, косоортогональное дополнение к гиперплоскости — прямая, совпадающая с ядром ограничения симплектической структуры на эту гиперплоскость.

Если у подпространства евклидова пространства есть лишь один инвариант — размерность, то в симплектической геометрии, кроме размерности, существенен ранг ограничения симплектической структуры на подпространство. Этот инвариант тривиален только в случаях прямой и гиперплоскости. Общую ситуацию описывает.

Линейная «относительная теорема Дарбу». *Подпространство ранга $2r$ и размерности $2r + k$ симплектического пространства в подходящих координатах Дарбу задается уравнениями*

$$q_{r+k+1} = \ldots = q_n = 0, \quad p_{r+1} = \ldots = p_n = 0.$$

Косоортогональное дополнение такого подпространства задается уравнениями $q_1 = \ldots = q_r = 0$, $p_1 = \ldots , p_{r+k} = 0$ и пересекается с ним по k-мерному ядру ограничения симплектической формы.

Подпространства, лежащие в своем косоортогональном дополнении (т. е. имеющие ранг 0), называются изотропными. Подпространства, содержащие свое косоортогональное дополнение, называются коизотропными. Подпространства, изотропные и коизотропные одновременно, называются лагранжевыми. Размерность лагранжевых подпространств равна половине размерности симплектического пространства.

Лагранжевы подпространства — максимальные изотропные и минимальные коизотропные. Лагранжевы подпространства играют особую роль в симплектической геометрии.

Примеры лагранжевых пространств.

1) В $X^* \oplus X$ подпространства $0 \oplus X$ и $X^* \oplus 0$ лагранжевы.

2) Линейный оператор $X \to X^*$ самосопряжен тогда и только тогда, когда его график в $X^* \oplus X$ лагранжев. Самосопряженному оператору A соответствует квадратичная форма $(Ax, x)/2$ на X. Она называется *производящей функцией* этого лагранжева подпространства.

3) Линейное преобразование пространства V тогда и только тогда сохраняет симплектическую форму ω, когда его график в пространстве $V \oplus V$ лагранжев относительно симплектической структуры $W = \pi_1 * \omega - \pi_2 * \omega$, где π_1, π_2 — проекции на первое и второе слагаемое (площадь $W(x, y)$ параллелограмма равна разности площадей проекций).

1.3. Лагранжев грассманиан. Множество всех лагранжевых подпространств симплектического пространства размерности 2π является гладким многообразием и называется *лагранжевым грассманианом* Λ_n.

Теорема. *Λ_n диффеоморфно многообразию смежных классов группы $\mathbf{U}_n$ унитарных $n \times n$-матриц по подгруппе $\mathbf{O}_n$ ортогональных матриц (унитарный репер в $\mathbb{C}^n$ порождает лагранжево подпространство в овеществлении $\mathbb{C}^n$).*

Следствие. $\dim \Lambda_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

О топологии Λ_n см. гл. 6.

Пример. Линейный комплекс прямых. Комплексом прямых называется 3-мерное семейство прямых в 3-мерном проективном пространстве. Ниже мы приводим конструкцию, связывающую так называемые линейные комплексы прямых с простейшими понятиями симплектической геометрии. Эта связь дала имя симплектической геометрии: в 1946 году Герман Вейль (H. Weyl) [74] предложил вместо вносившего терминологическую путаницу прилагательного «com-plex» (оно состоит из латинских корней, имеющих значение «сплетенные вместе») употреблять прилагательное «com-plectic», образованное от эквивалентных греческих корней.

Следующая далее конструкция показывает, что лагранжев грассманиан Λ_2 диффеоморфен неособой квадрике (сигнатуры $(+\ +\ +\ -\ -)$) в 4-мерном проективном пространстве.

Точки проективного пространства $\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}(V)$ — это одномерные подпространства в 4-мерном векторном пространстве V. Прямые в $\mathbf{P}^3$ — это 2-мерные подпространства в V. Каждое такое подпространство однозначно с точностью до множителя определяет внешнюю 2-форму φ ранга 2, ядро которой совпадает с этим подпространством. Формы ранга 2 образуют в 6-мерном пространстве $\wedge^2 V$ всех внешних 2-форм квадратичный конус с уравнением $\varphi \wedge \varphi = 0$. Таким образом, многообразие всех прямых в $\mathbf{P}^3$ — это квадрика Q в $\mathbf{P}^5 = P(\wedge^2 V)$. Линейный комплекс прямых задается пересечением квадрики Q с гиперплоскостью H в $\mathbf{P}^5$. Гиперплоскость в $P(\wedge^2 V)$ задается с помощью внешней 2-формы ω на V: $H = P(\{\varphi \in \wedge^2 V \bigm| \omega \wedge \varphi = 0\})$. Невырожденность формы ω эквивалентна тому, что линейный комплекс прямых $H \cap Q$ неособ. Уравнение $\omega \wedge \varphi = 0$ для формы φ ранга 2 означает, что ее ядро лагранжево относительно симплектической структуры ω. Поэтому неособый линейный комплекс прямых представляет собой лагранжев грассманиан Λ_2.

§ 2. Линейные гамильтоновы системы

Здесь обсуждается жорданова нормальная форма инфинитезимальных симплектических преобразований.

2.1. Симплектическая группа и ее алгебра Ли (S. Lie). Линейное преобразование G симплектического пространства (V, ω) называется *симплектическим преобразованием,* если оно сохраняет кососкалярное произведение: $\omega(Gx, Gy) = \omega(x, y)$ для всех $x, y \in V$. Симплектические преобразования образуют группу Ли, обозначаемую $\mathrm{Sp}(V)$ ($\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ или $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ для стандартного вещественного или комплексного $2n$-мерного симплектического пространства).

Рассмотрим однопараметрическое семейство симплектических преобразований; пусть нулевому значению параметра отвечает тождественное преобразование. Производная преобразования семейства по параметру (в нуле) называется *гамильтоновым оператором.* Дифференцированием условия симплектичности преобразования находим условие гамильтоновости оператора H: $\omega(Hx, y) + \omega(x, Hy) = 0$ для всех $x, y \in V$. Коммутатор гамильтоновых операторов снова гамильтонов оператор: гамильтоновы операторы образуют алгебру Ли $\mathrm{sp}(V)$ группы Ли $\mathrm{Sp}(V)$.

Квадратичная форма $h(x) = \omega(x, Hx)/2$ называется *гамильтонианом* оператора H. Гамильтонов оператор восстанавливается по своему гамильтониану из уравнения $h(x+y) - h(x) - h(y) = \omega(y, Hx)$ для всех x, y. Мы получаем изоморфизм пространства гамильтоновых операторов и пространства квадратичных форм в симплектическом пространстве V.

Следствие. $\dim \mathrm{Sp}(V) = n(2n+1)$, *где* $2n = \dim V$.

Коммутатор гамильтоновых операторов определяет структуру *алгебры* Ли в пространстве *квадратичных гамильтонианов:* $\{h_1, h_2\}(x) = \dfrac{\omega(x, (H_2H_1 - H_1H_2)x)}{2} = \omega(H_1x, H_2x)$.

Операция $\{\cdot, \cdot\}$ называется *скобкой Пуассона* (S. D. Poisson). В координатах Дарбу скобка Пуассона имеет вид

$$\{h_1, h_2\} = \sum \Bigl(\frac{\partial h_1}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial q_k} - \frac{\partial h_2}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial q_k}\Bigr).$$

Матрица гамильтонова оператора в координатах Дарбу $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ удовлетворяет соотношениям[1] $B^* = B$, $C^* = C$, $D^* = -A$. Соответствующий гамильтониан h — квадратичная форма, матрица которой есть $[h] = -\frac{1}{2}\Omega H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}$.

Линейная *гамильтонова система* дифференциальных уравнений $\dot{x} = Hx$ в координатах Дарбу записывается так: $\dot{p} = -\dfrac{\partial h}{\partial q}$, $\dot{q} = \dfrac{\partial h}{\partial p}$. В частности, гамильтониан является первым интегралом своей гамильтоновой системы: $\dot{h} = \dfrac{\partial h}{\partial q} \cdot \dot{q} + \dfrac{\partial h}{\partial p} \cdot \dot{p}$. Таким образом, мы выразили в терминах пространства квадратичных гамильтонианов структуру алгебры Ли симплектической группы и ее действие в пространстве V.

Пример 1. Гамильтониану $h = \dfrac{\omega(p^2 + q^2)}{2}$ отвечает система уравнений $\dot{q} = \omega p$, $\dot{p} = -\omega q$ гармонического осциллятора.

[1] $*$ — транспонирование.

Пример 2. Группа симплектических преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$ совпадает с группой $\mathrm{SL}(2,\,\mathbb{R})$ 2×2-матриц с определителем 1. Ее алгебра Ли $\mathrm{sl}(2,\,\mathbb{R})$ имеет три образующих $X=\frac{q^2}{2}$, $Y=-\frac{p^2}{2}$, $H=pq$ с коммутаторами $[X,\,Y]=H$, $[H,\,X]=2X$, $[H,\,Y]=-2Y$.

2.2. Комплексная классификация гамильтонианов. Два гамильтоновых оператора в симплектическом пространстве V будем считать эквивалентными, если они переводятся друг в друга симплектическим преобразованием. Соответствующая задача классификации вполне аналогична задаче о жордановой нормальной форме линейного оператора. На более ученом языке речь идет о классификации орбит присоединенного действия симплектической группы в ее алгебре Ли. В комплексном случае ответ дает следующая

Теорема Вильямсона (J. Williamson) [77]). *Гамильтоновы операторы в комплексном симплектическом пространстве эквивалентны тогда и только тогда, когда они подобны (т. е. имеют одинаковую жорданову структуру).*

Симплектическая форма позволяет следующим образом отождествить пространство V с сопряженным пространством $V^*\colon x\to\omega(x,\,\cdot)$. При таком отождествлении оператор $H^*\colon V^*\to V^*$, сопряженный гамильтонову оператору $H\colon V\to V$, превращается в $-H$. Поэтому жорданова структура гамильтонова оператора удовлетворяет ограничениям

1) если a — собственное число, то $-a$ — тоже собственное число;

2) жордановы клетки, отвечающие собственным числам a и $-a$, имеют одинаковую структуру;

3) жордановых клеток нечетного размера с собственным числом $a=0$ — четное количество.

В остальном жордановы структуры гамильтоновых операторов произвольны.

Следствие. *Пусть $H\colon V\to V$ — гамильтонов оператор. Тогда V распадается в прямую косоортогональную сумму симплектических подпространств, на каждом из которых оператор H имеет либо две жордановы клетки одинакового размера с противоположными собственными числами, либо одну жорданову клетку четного порядка с нулевым собственным числом.*

2.3. Линейные вариационные задачи. В качестве нормальных форм линейных гамильтоновых систем можно взять уравнения экстремален специальных вариационных задач. Мы предполагаем, что читатель знаком с простейшими понятиями вариационного исчисления, и будем пользоваться формулами из п. 1.4 главы 3, где описан гамильтонов формализм вариационных задач со старшими производными.

Пусть $x = x(t)$ — функция переменной t, $x_k = \dfrac{d^k t}{dt^k}$. Рассмотрим задачу оптимизации функционала $\int L(x_0, \ldots, x_n)\,dt$ с лагранжианом $L = (x_n^2 + a_{n-1}x_{n-1}^2 + \ldots + a_0 x_0^2)/2$. Уравнение экстремалей такого функционала

$$x_{2n} - a_{n-1}x_{2n-2} + \ldots + (-1)^n a_0 x_0 = 0$$

является линейные однородным уравнением с постоянными коэффициентами, в которое входят производные искомой функции x только четного порядка.

С другой стороны, уравнение экстремалей эквивалентно гамильтоновой системе (см. п. 1.4, гл. 3) с квадратичным гамильтонианом

$$h = \pm\left\{p_0 q_1 + \ldots + p_{n-2}q_{n-1} + \frac{(p_{n-1}^2 - a_{n-1}q_{n-1}^2 - \ldots - a_0 q_0^2)}{2}\right\},$$

где $q_k = x_k$, $p_{n-1} = x_n$, $p_{k-1} = a_k x_k - \dfrac{dp_k}{dt}$ — координаты Дарбу в $2n$-мерном фазовом пространстве уравнения экстремалей.

Заметим, что этой конструкцией не получается гамильтонова система с парой жордановых клеток нечетного порядка n с собственным числом 0. Такой системе отвечает гамильтониан $\pm(p_0 q_1 + \ldots + p_{n-2}q_{n-1})$. Гамильтонова жорданова клетка порядка $2n$ с собственным числом 0 получается при $L = \dfrac{x_n^2}{2}$. Экстремали в этом случае — решения уравнения $\dfrac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = 0$, т.е. многочлены $x(t)$ степени $< 2n$. Вообще, лагранжиану L с характеристическим многочленом $\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \ldots + a_0 = \xi^{m_0}(\xi + \xi_1)^{m_1} \ldots (\xi + \xi_k)^{m_k}$ отвечает гамильтонов оператор с одной жордановой клеткой размера $2m_0$ и собственным числом 0 и k парами жордановых клеток размеров m_j с собственными числами $\pm\sqrt{\xi_j}$.

2.4. Нормальные формы вещественных квадратичных гамильтонианов. Очевидное отличие вещественного случая от комплексного состоит в том, что жордановы клетки гамильтонова оператора разбиваются на четверки клеток одинакового размера с собственными числами $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, если только $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Более существенное отличие заключается в следующем. Две вещественные матрицы вещественно подобны, если они подобны как комплексные матрицы. Для квадратичных гамильтонианов это не всегда так. Например, гамильтонианы $\pm(p^2+q^2)$ гармонического осциллятора имеют одинаковые собственные числа $\pm 2\sqrt{-1}$, т. е. эквивалентны над $\mathbb{C}$, но не эквивалентны над $\mathbb{R}$: на ориентированной кососкалярным произведением фазовой плоскости этим гамильтонианам отвечают вращения в разные стороны. В частности, теорема Вильямсона п. 2.2 в том виде, как она там сформулирована, не переносится на вещественный случай.

Мы приводим список элементарных нормальных форм квадратичных гамильтонианов в координатах Дарбу $p_0, \ldots, p_{n-1}, q_0, \ldots, q_{n-1}$ стандартного симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$.

1) Паре жордановых клеток (нечетного) порядка n с собственным числом нуль отвечает гамильтониан

$$h_0 = \sum_{k=0}^{n-2} p_k q_{k+1} \qquad (h_0 = 0 \text{ при } n = 1).$$

2) Жордановой клетке четного порядка $2n$ с собственным числом нуль отвечает гамильтониан ровно одного из двух видов

$$\pm(h_0 + \frac{p_{n-1}^2}{2}).$$

3) Паре жордановых клеток порядка n с ненулевыми собственными числами $\pm z$ отвечает гамильтониан одного из двух видов

$$\pm\Big(h_0 + \frac{p_{n-1}^2}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_n^k z^{2(n-k)} q_k^2}{2}\Big)$$

(при вещественном z эти два гамильтониана эквивалентны между собой, при чисто мнимом z — не эквивалентны).

4) Четверке жордановых клеток порядка $m = \frac{n}{2}$ с собственными числами $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ отвечает гамильтониан

$$h_0 + \frac{p_{n-1}^2}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k q_k^2}{2},$$

где

$$\sum A_k \xi^k = [\xi^2 + 2(a^2 - b^2)\xi + (a^2 + b^2)^2]^m.$$

Теорема [77]. *Вещественное симплектическое пространство, на котором задан квадратичный гамильтониан h, распадается в прямую косоортогональную сумму вещественных симплектических подпространств так, что форма h представляется в виде суммы элементарных форм в подходящих координатах Дарбу на этих подпространствах.*

2.5. Знакоопределенные гамильтонианы и принцип минимакса[1]. Положительно определенный квадратичный гамильтониан в подходящих координатах Дарбу имеет вид $h = \sum \frac{\omega_k(p_k^2 + q_k^2)}{2}$, где $\omega_n \geqslant \omega_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant \omega_1 > 0$. Для «частот» ω_k имеется следующий принцип минимакса.

Кососимметрическая билинейная форма Ω в подходящих декартовых координатах евклидова пространства V^N имеет вид $\lambda_1 p_1 \wedge q_1 + \ldots + \lambda_n p_n \wedge q_n$, $2n \leqslant N$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > 0$. Ориентированной плоскости $L \subset V^N$ сопоставим площадь $S(L)$ единичного круга $D(L) = \{x \in L | \langle x, x \rangle \leqslant 1\}$ относительно формы Ω.

Теорема.

$$\min_{V^{N+1-k} \subset V^N} \max_{L \subset V^{N+1-k}} S(L) = \pi\lambda_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следствие. *Инварианты λ'_k ограничения формы Ω на подпространство $W^{N-M} \subset V^N$ удовлетворяют неравенствам $\lambda_k \geqslant \lambda'_k \geqslant \lambda_{k+M}$ (мы полагаем $\lambda_m = 0$ при $m > n$).*

Например,

$$\pi\lambda'_1 = \max_{L \subset W} S(L) \leqslant \max_{L \subset V} S(L) = \pi\lambda_1$$

и

$$\pi\lambda'_1 = \max_{L \subset W^{N-M}} S(L) \geqslant \min_{V^{N-M} \subset V^N} \max_{L \subset V^{N-M}} S(L) = \pi\lambda_{M+1}.$$

[1] Результаты этого пункта получены В. И. Арнольдом в 1977 году, в связи с гипотезой о полунепрерывности спектра особенности.

Замечание 1. Принцип минимакса Куранта (R. Courant) для пары эрмитовых форм в $\mathbb{C}^n$: $U = \sum z_k\bar{z}_k$, $U' = \sum \lambda_k z_k \bar{z}_k$, $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, утверждает, что

$$\lambda_k = \min_{\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n} \max_{\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^k} \left(\frac{U'}{U}\right) = \max_{\mathbb{C}^{n+1-k} \subset \mathbb{C}^n} \min_{\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{n+1-k}} \left(\frac{U'}{U}\right).$$

Отсюда легко вывести нашу теорему.

Замечание 2. Принимая симплектическую структуру в $\mathbb{R}^{2n}$ за Ω, а положительно определенный гамильтониан h за евклидову структуру, получаем принцип минимакса и аналогичные следствия для частот $\omega_k = \dfrac{2}{\lambda_k}$. В частности, при увеличении гамильтониана частоты растут: $\omega_k' \geqslant \omega_k$.

§ 3. Семейства квадратичных гамильтонианов

Жорданова нормальная форма оператора, непрерывно зависящего от параметра, является, вообще говоря, разрывной функцией параметра. Вводимые ниже миниверсальные деформации — это нормальные формы семейств операторов, избавленные от указанного недостатка.

3.1. Понятие миниверсальной деформации. Оно относится к следующей абстрактной ситуации. Пусть на гладком многообразии M действует группа Ли G. Точки на M считаются эквивалентными, если они лежат в одной орбите, т. е. переходят друг в друга под действием этой группы. Семейством с пространством параметров (базой) V называется гладкое отображение $V \to M$. Деформацией элемента $x \in M$ называется росток семейства $(V, o) \to (M, x)$ (o — начало координат в $V \simeq \mathbb{R}^n$. Говорят, что деформация $\varphi\colon (V, o) \to (M, x)$ индуцирована из деформации $\psi\colon (W, o) \to (M, x)$ при гладком отображении баз $\nu\colon (V, o) \to (W, o)$, если $\varphi = \psi \circ \nu$. Деформации $\varphi, \psi\colon (V, o) \to (M, x)$ называются эквивалентными, если существует такая деформация единицы $g\colon (V, o) \to (G, \mathrm{id})$, что $\varphi(v) = g(v)\psi(v)$.

Определение. Деформация $\varphi\colon (V, o) \to (M, x)$ называется версальной, если любая деформация элемента x эквивалентна деформации, индуцированной из φ. Версальная деформация с наименьшей возможной для версальной деформации размерностью базы называется миниверсальной.

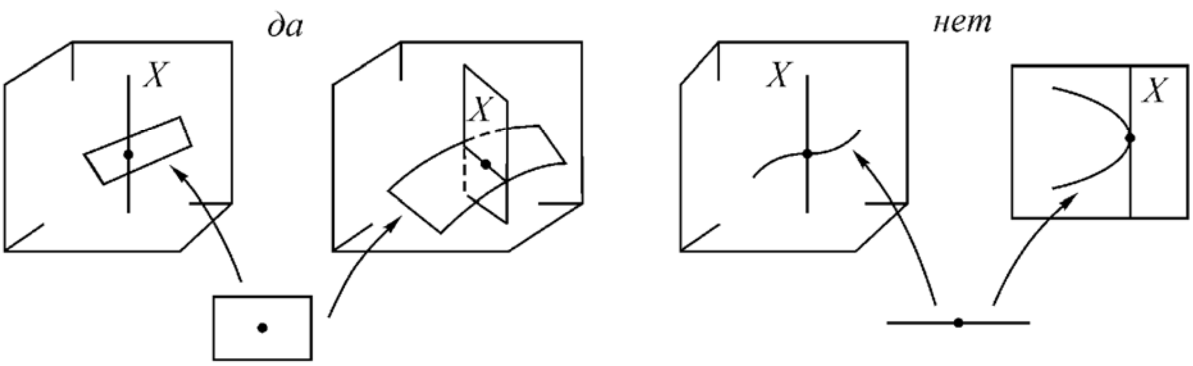


Рис. 1. Трансверсальность

Росток многообразия M в точке x, очевидно, является версальной деформацией для x, но, вообще говоря, не миниверсальной.

Пример. Пусть M — пространство квадратичных гамильтонианов в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ — группа симплектических линейных преобразований в $\mathbb{R}^{2n}$. Следующая деформация (λ — параметры).

$$\begin{aligned} H_\lambda = \sum_{k=1}^{s} [(b_k + \lambda_{2k-1})(p_{2k-1}q_{2k} - q_{2k-1}p_{2k}) - \\ -(a_k + \lambda_{2k})(p_{2k-1}q_{2k-1} + p_{2k}q_{2k})] + \\ + \sum_{k=2s+1}^{r} (c_k + \lambda_k)p_k q_k + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{(d_k + \lambda_k)(p_k^2 + q_k^2)}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

является миниверсальной деформацией гамильтониана H_0, если его спектр $\{\pm a_k \pm \sqrt{-1}b_k, \pm c_k, \pm\sqrt{-1}d_k\}$ некратный.

Пусть $X \subset M$ — подмногообразие. Говорят, что деформация $\varphi\colon (V, o) \to (M, x)$ точки $x \in X$ трансверсальна к X, если $\varphi_*(T_0 V) + T_x X = T_x M$ (рис. 1).

Теорема версальности. *Деформация точки $x \in M$ нереальна тогда и только тогда, когда она трансверсальна орбите Gx точки x в M.*

Следствие. *Число параметров миниверсальной деформации равно коразмерности орбиты.*

Набросок доказательства теоремы (см. рис. 2). Выберем трансверсаль L в единице группы G к стационарной подгруппе $\mathrm{St}_x = \{g \mid gx = x\}$

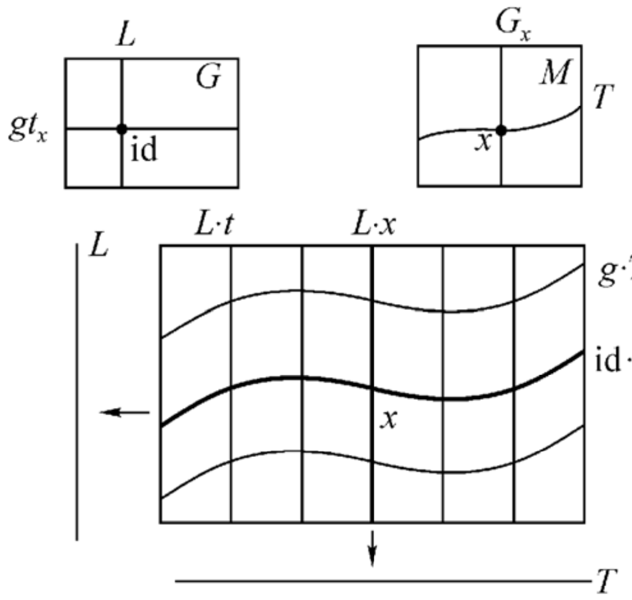


Рис. 2

точки $x \in M$ и трансверсаль T в точке x к ее орбите в M. Действие элементами из L на точки из T задает диффеоморфизм окрестности точки x в M прямому произведению $L \times T$. Теперь каждая деформация $\varphi\colon (V, o) \to (M, x)$ автоматически принимает вид $\varphi(v) = g(v)t(v)$, где $g\colon (V, o) \to (G, \mathrm{id})$, $t\colon (V, o) \to (T, x)$.

3.2. Миниверсальные деформации квадратичных гамильтонианов. Пусть снова M — пространство квадратичных гамильтонианов в $\mathbb{R}^{2n}$, $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Мы будем отождествлять M с пространством гамильтоновых матриц размера $2n \times 2n$. Введем в пространстве таких матриц поэлементное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Оно может быть представлено в виде $\langle H, F\rangle = tr(HF^*)$, где $*$ означает транспонирование. Заметим, что матрица, транспонированная к гамильтоновой — снова гамильтонова. Из свойств следа получаем: $\langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X^*, Z]\rangle = 0$, где $[X, Y] = XY - YX$ — коммутатор.

Лемма. *Ортогональное дополнение в M к касательному пространству в точке H орбиты гамильтониана H совпадает с централизатором $Z_{H^*} = \{X \in M \mid [X, H^*] = 0\}$ гамильтониана H^* в алгебре Ли квадратичных гамильтонианов.*

Доказательство.

Если $\langle [H, F], X\rangle = 0$ для всех $F \in M$, то $\langle F, [H^*, X]\rangle = 0$, т. е. $[H^*, X] = 0$, и обратно. ■

Следствие. *Деформация* $(Z_H, 0) \to (M, H) \colon X \mapsto H + X^*$ — *миниверсальная деформация квадратичного гамильтониана* H.

Для гамильтониана H обозначим через $n_1(z) \geqslant n_2(z) \geqslant \ldots \geqslant n_s(z)$ размеры жордановых клеток с собственным числом $z \neq 0$, а через $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_u$ и $\widetilde{m}_1 \geqslant \ldots \geqslant \widetilde{m}_v$ размеры его жордановых клеток с собственным числом нуль, причем m_j четны, а $\widetilde{m}_j$ нечетны (из каждой пары клеток нечетного размера учитывается одна).

Теорема [9]. *Размерность* d *базы миниверсальной деформации гамильтониана* H *равна*

$$d = \frac{1}{2} \sum_{z \neq 0} \sum_{j=1}^{s(z)} (2j-1) n_j(z) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{u} (2j-1) m_j + \\ + \sum_{j=1}^{v} [2(2j-1)\widetilde{m}_j + 1] + 2 \sum_{j=1}^{u} \sum_{k=1}^{v} \min(m_j, \widetilde{m}_k).$$

В работе [9] приведен явный вид миниверсальных деформаций для всех нормальных форм квадратичных гамильтонианов.

3.3. Семейства общего положения. Разобьем пространство квадратичных гамильтонианов на классы в соответствии с наличием собственных чисел разных типов (но не числовых значений) и с размерами жордановых клеток. Такая классификация, в отличие от классификации по G-орбитам, дискретна (даже конечна). Говорят, что гамильтонианы данного класса не встречаются в l-параметрических семействах общего положения, если их можно устранить сколь угодно малым возмущением семейства. Например, гамильтониан общего положения не имеет кратных собственных чисел; он также не имеет наперед заданного спектра собственных чисел, но все же имеет какой-то другой спектр.

Важность изучения явлений общего положения объясняется тем, что в приложениях исследуемый объект часто известен лишь приближенно или подвержен возмущениям, из-за которых исключительные явления непосредственно не наблюдаются.

Коразмерностью с данного класса называется наименьшее число параметров семейств, в которых гамильтонианы этого класса встречаются неустранимо.

Обозначим через ν половину числа различных ненулевых собственных значений гамильтонианов из данного класса.

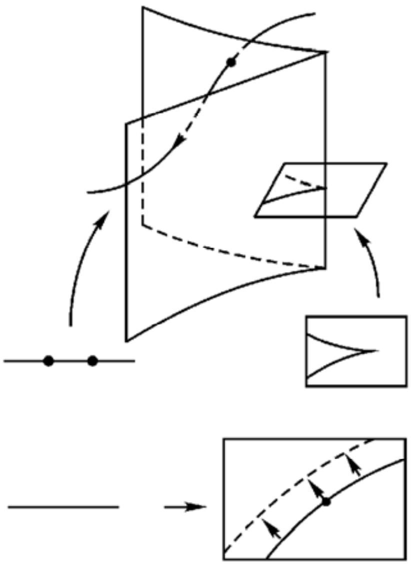


Рис. 3

Теорема. $c = d - \nu$ *(так что формула для* c *получается из формулы для* d *предыдущей теоремы уменьшением каждого слагаемого вида* $\sum(2j-1)n_j(z)$ *на единицу).*

Доказательство этой теоремы основано на том интуитивно очевидном факте, что семейства общего положения трансверсальны каждому классу (рис. 3) (подробнее об этом см. [2], [6]), и на том, что число параметров, нумерующих G-орбиты данного класса, равно ν.

Следствие 1. *В одно- и двухпараметрических семействах квадратичных гамильтонианов встречаются как неустранимые только жордановы клетки следующих двенадцати типов*

$$c = 1 : (\pm a)^2,\ (\pm ia)^2,\ 0^2$$

(здесь жордановы клетки обозначаются их определителями, например, $(\pm a)^2$ *означает пару жордановых клеток порядка 2 с собственными числами* a *и* $-a$ *соответственно);*

$$c = 2\colon (\pm a)^3,\quad (\pm ia)^3,\quad (\pm a \pm ib)^2,\quad 0^4,\quad (\pm a)^2(\pm b)^2,$$
$$(\pm ia)^2(\pm ib)^2,\quad (\pm a)^2(\pm ib)^2,\quad (\pm a)^2 0^2,\quad (\pm ia)^2 0^2$$

(остальные собственные числа простые).

Следствие 2. *Пусть* F_t *— гладко зависящее от одного параметра семейство общего положения квадратичных гамильтонианов. В окрестности любого значения* $t = t_0$ *существует гладко зависящая от* t *система линейных координат Дарбу, в которой а) для почти всех* t_0, F_t *имеет вид* H_λ (см. формулу (1)), *б) для изолированных значений* t_0, F_t *имеет одну из следующих форм*

$$(\pm a)^2\colon P_1Q_2 + \frac{P_2^2}{2} - \frac{(a^4+\mu_1)Q_1^2}{2} - (a^2+\mu_2)Q_2^2 + H_\lambda(p,\, q),$$

$$(\pm ia)^2\colon\ \pm\left[P_1Q_2+\frac{P_2^2}{2}-\frac{(a^4+\mu_1)Q_1^2}{2}+(a^2+\mu_2)Q_2^2\right]+H_\lambda(p,\,q),$$

$$0^2\colon\ \pm\left[\frac{P^2}{2}-\frac{\mu Q^2}{2}\right]+H_\lambda(p,\,q)$$

(здесь $(P,\,Q,\,p,\,q)$ — координаты Дарбу в $\mathbb{R}^{2m}$, $(\lambda,\,\mu)$ — гладкие функции параметра t, $(\lambda(t_0),\,\mu(t_0))=(0,\,0)$).

Доказательство.

Приведенные формулы являются миниверсальными деформациями представителей классов коразмерности 1. ■

3.4. Бифуркационные диаграммы. Бифуркационной диаграммой деформации гамильтониана называется росток разбиения пространства параметров на прообразы классов. Бифуркационные диаграммы семейств общего положения отражают (ввиду условия трансверсальности классам, см. рис. 3) структуру разбиения на классы в самом пространстве квадратичных гамильтонианов.

На рис. 4 и 5 приведены бифуркационные диаграммы деформаций общего положения для классов коразмерности 1 и первых четырех классов коразмерности 2 по порядку их перечисления в формулировке следствия 1.

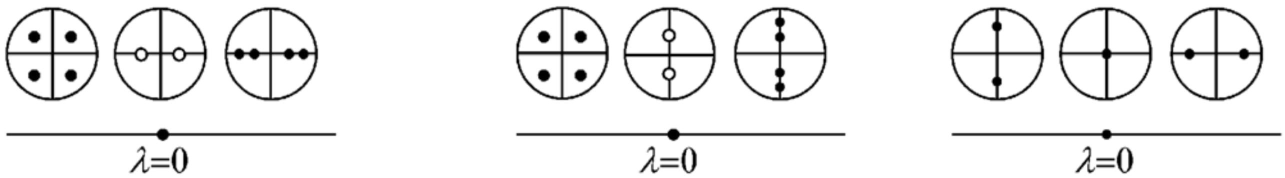
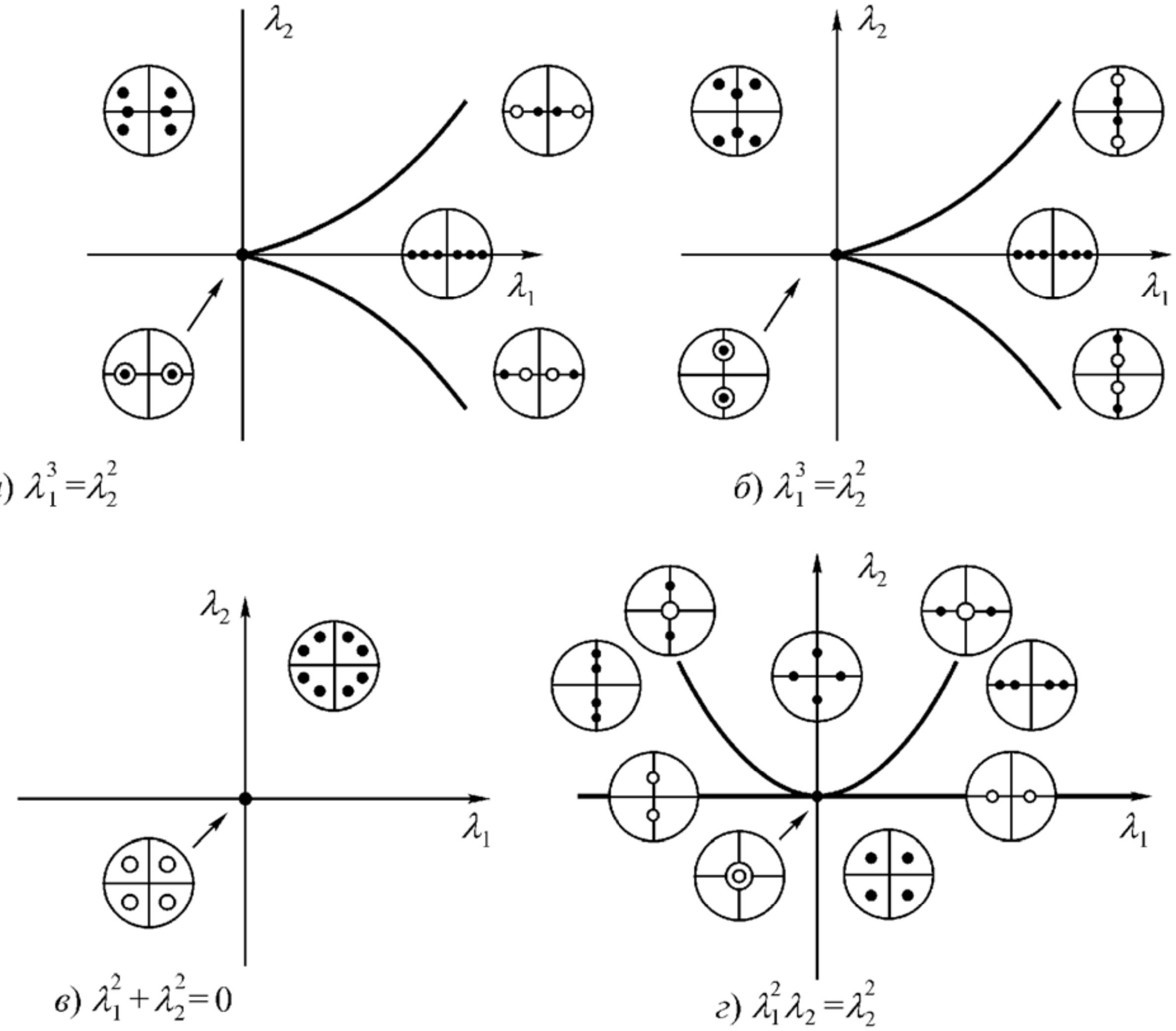


Рис. 4

Замечание. Не следует думать, что бифуркационная диаграмма вещественного квадратичного гамильтониана зависит только от жордановой структуры. Рассмотрим следующий важный пример. Гамильтоновы операторы с некратным чисто мнимым спектром образуют открытое множество в пространстве гамильтоновых операторов. Гамильтоновы операторы с кратным чисто мнимым спектром, но без жордановых клеток, образуют множество коразмерности 3 в пространстве гамильтоновых операторов. Если такой оператор H имеет спектр $\{\pm\sqrt{-1}\omega_k\}$, то соответствующий гамильтониан в подходящих координатах Дарбу имеет вид $h=\dfrac{\omega_1(p_1^2+q_1^2)+\ldots+\omega_n(p_n^2+q_n^2)}{2}$.



а) $\lambda_1^3=\lambda_2^2$ б) $\lambda_1^3=\lambda_2^2$

в) $\lambda_1^2+\lambda_2^2=0$ г) $\lambda_1^2\lambda_2=\lambda_2^2$

Рис. 5

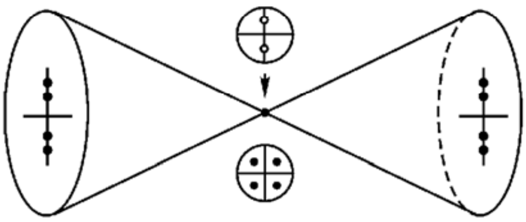


Рис. 6

Пусть, скажем, $\omega_1^2=\omega_2^2\neq 0$. Если инварианты ω_1 и ω_2 гамильтониана h одного знака, то бифуркационная диаграмма представляет собой точку (класс h) в пространстве $\mathbb{R}^3$ — все близкие к h гамильтонианы имеют чисто мнимый спектр и не имеют жордановых клеток. Если инварианты ω_1 и ω_2 разных знаков, то бифуркационная диаграмма представляет собой квадратичный конус (рис. 6), точкам которого отвечают операторы с жордановыми клетками размера 2.

§ 4. Симплектическая группа

Приводимые ниже сведения о вещественных симплектических группах применяются в конце раздела к теории линейных гамильтоновых систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

4.1. Спектр симплектического преобразования. *Симплектическая группа* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ состоит из линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n}$, сохраняющих стандартную симплектическую структуру $\omega = \sum p_k \wedge q_k$. Матрица G симплектического преобразования в базисе Дарбу удовлетворяет поэтому определяющему соотношению $G^* \Omega G = \Omega$.

Теорема. *Спектр вещественного симплектического преобразования симметричен относительно единичной окружности и вещественной оси. Корневые подпространства, соответствующие симметричным собственным числам, имеют одинаковую жорданову структуру.*

Действительно, определяющее соотношение показывает, что матрицы G и G^{-1} подобны над $\mathbb{C}$. Это приводит к инвариантности жордановой структуры симплектического преобразования и его спектра относительно симметрии $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$. Вещественность дает вторую симметрию $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$.

4.2. Экспоненциальное отображение и параметризация Кэли (A. Cayley). Экспонента оператора задает экспоненциальное отображение $H \mapsto \exp(H) = \sum H^k/k!$ пространства гамильтоновых операторов в симплектическую группу. Симплектическая группа дейсвует сопряжениями на себе и на своей алгебре Ли. Экспоненциальное отображение инвариантно относительно этого действия: $\exp(G^{-1}HG) = G^{-1}\exp(H)G$.

Отображение exp является диффеоморфизмом окрестности нуля в алгебре Ли на окрестность единицы в группе. Обратное отображение задается рядом $\ln G = -\sum (E - G)^k/k$. Отображение $\exp\colon \mathrm{sp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ не является ни вложением, ни отображением «на». Поэтому для изучения симплектической группы бывает полезнее параметризация Кэли: $G = (E+H)(E-H)^{-1}$, $H = (G-E)(G+E)^{-1}$. Эти формулы задают диффеоморфизм ca множества гамильтоновых операторов H, все собственные числа которых отличны от ± 1, 0, на множество симплектических преобразований G, все собственные числа которых отличны от ± 1.

Используя отображения ca, exp, $-\exp$ и результаты § 2, можно получить следующий результат.

Теорема. *Симплектическое пространство, на котором задано симплектическое преобразование G, распадается в прямую косоортогональную сумму симплектических подпространств, на каждом из* *которых преобразование G в подходящих координатах Дарбу имеет вид $\pm\exp(H)$, где H — элементарный гамильтонов оператор из п.* 2.4.

Замечание. Отображение Кэли не инвариантно относительно сопряжений, но операторы H и $G = \mathrm{ca}(H)$ имеют общий жорданов базис.

4.3. Подгруппы симплектической группы. Симплектические преобразования $\pm E$ перестановочны со всеми элементами группы $\mathrm{Sp}(V^{2n})$ и образуют ее центр.

Каждая компактная подгруппа в $\mathrm{Sp}(V^{2n})$ лежит в пересечении $\mathrm{Sp}(V^{2n})$ с ортогональной группой $\mathbf{O}(V^{2n})$ преобразований, сохраняющих некоторый положительно определенный квадратичный гамильтониан $h = \sum \dfrac{\omega_k(p_k^2 + q_k^2)}{2}$. Если все ω_k различны, пересечение $\mathrm{Sp}(V^{2n}) \cap \mathbf{O}(V^{2n}, h)$ является n-мерным тором $\mathbf{T}^n$ и порождается преобразованиями $\exp(\lambda H_k)$, где H_k имеет гамильтониан $\dfrac{(p_k^2 + q_k^2)}{2}$. Каждая компактная коммутативная подгруппа в $\mathrm{Sp}(V^{2n})$ лежит в некотором торе $\mathbf{T}^n$ описанного выше вида. Все такие торы сопряжены в симплектической группе.

Рассмотрим нормализатор $N(\mathbf{T}^n) = \{g \in \mathrm{Sp}(V^{2n}) \,|\, g\mathbf{T}^n g^{-1} = \mathbf{T}^n\}$ тора $\mathbf{T}^n$ в симплектической группе. Фактор-группа $W = N(\mathbf{T}^n)/\mathbf{T}^n$ называется группой Вейля. Она конечна, изоморфна группе перестановок п символов и действует на торе перестановками однопараметрических подгрупп $\exp(\lambda H_k)$. Элементы тора сопряжены в симплектической группе тогда и только тогда, когда они лежат в одной орбите этого действия.

Если все ω_k равны между собой, гамильтониан h вместе с симплектической формой наделяют V^{2n} структурой n-мерного комплексного эрмитова пространства. Пересечение $\mathrm{Sp}(V^{2n}) \cap \mathbf{O}(V^{2n}, h)$ совпадает с унитарной группой $\mathbf{U}_n$ этого пространства. Все подгруппы $\mathbf{U}_n$ сопряжены. Каждая компактная подгруппа в $\mathrm{Sp}(V^{2n})$ лежит в некоторой унитарной подгруппе такого вида. В частности, тор $\mathbf{T}^n$ и его нормализатор $N(\mathbf{T}^n)$ лежат в (единственной) подгруппе $\mathbf{U}_n$.

Замечание 1. В комплексной симплектической группе $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ максимальная компактная подгруппа изоморфна *компактной симплектической группе* Sp_n преобразований n-мерного пространства над телом кватернионов.

Замечание 2. Тор $\mathbf{T}^n$ является максимальным тором и в комплексной симплектической группе: $\mathbf{T}^n \subset \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$, но его нормализатор $N_{\mathbb{C}}(\mathbf{T}^n)$ в $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ отличается от нормализатора $N(\mathbf{T}^n)$ в $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Группа Вейля $W_{\mathbb{C}} = N_{\mathbb{C}}(\mathbf{T}^n)/\mathbf{T}^n$ действует на $\mathbf{T}^n$ композициями перестановок подгрупп $\exp(\lambda H_k)$ и отражений $\exp(\lambda H_k) \mapsto \mapsto \exp(-\lambda H_k)$.

Пример. Группа $\mathbf{Sp}_1 \subset \mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$ единичных кватернионов совпадает с группой $\mathbf{SU}(2)$. В качестве максимального тора в $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$ можно взять группу $\mathbf{SO}(2)$ поворотов плоскости. В данном случае максимальный тор совпадает с максимальной компактной подгруппой $\mathbf{U}_1$ в $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$. Группа Вейля W тривиальна. Комплексная группа Вейля $W_{\mathbb{C}}$ изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ее действие на $\mathbf{SO}(2)$ задается сопряжением с помощью матрицы $\mathrm{diag}(\sqrt{-1}, -\sqrt{-1})$.

4.4. Топология симплектической группы. Теорема. *Многообразие* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ *диффеоморфно декартову произведению унитарной группы* $\mathbf{U}_n$ *на векторное пространство размерности* $n(n+1)$.

Ключ к доказательству дает полярное разложение: обратимый оператор A в евклидовом пространстве однозначно представляется в виде произведения $S{\cdot}U$ обратимого симметрического положительного оператора $S = (AA^*)^{1/2}$ и ортогонального оператора $U = S^{-1}A$. Для симплектических операторов A, действующих в овеществлении $\mathbb{R}^{2n}$ эрмитова пространства $\mathbb{C}^n$, операторы U оказываются унитарными, а логарифмы $\ln S$ операторов S заполняют $n(n+1)$-мерное пространство симметрических гамильтоновых операторов.

Следствие. 1) *Симплектическая группа* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ *стягивается на унитарную подгруппу* $\mathbf{U}_n$.

2) *Симплектическая группа* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ *связна. Фундаментальная группа* $\pi_1(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}))$ *изоморфна* $\mathbb{Z}$.

Последнее вытекает из свойств многообразия $\mathbf{U}_n$: $\mathbf{U}_n \simeq \mathbf{SU}_n \times S^1$ (функция $\det_{\mathbb{C}} \colon \mathbf{U}_n \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ задает проекцию на второй сомножитель); группа $\mathbf{SU}_n$, связна и односвязна (это следует из точных гомотопических последовательностей расслоений $\mathbf{SU}_n \xrightarrow{\mathbf{SU}_{n-1}} S^{2n-1}$).

Пример. Группа $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ диффеоморфна произведению открытого круга на окружность.

4.5. Линейные гамильтоновы системы с периодическими коэффициентами [12]. Пусть h — квадратичный гамильтониан, коэффициенты которого непрерывно зависят от времени t и периодичны по t с общим периодом. Гамильтониану h отвечает линейная гамильтонова система с периодическими коэффициентами

$$\dot{q} = \frac{\partial h}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial h}{\partial q}. \tag{2}$$

Такие системы встречаются при исследовании устойчивости периодических решений нелинейных гамильтоновых систем, в теории автоматического регулирования и вопросах параметрического резонанса.

Назовем систему (2) устойчивой, если все ее решения ограничены при $t \to \infty$, и сильно устойчивой, если все близкие линейные гамильтоновы системы с периодическими коэффициентами тоже устойчивы (близость понимается в смысле нормы $\max\limits_t \|h(t)\|$).

Две сильно устойчивые гамильтоновы системы будем называть гомотопными, если их можно непрерывно продеформировать друг в друга, оставаясь в классе сильно устойчивых систем вида (2).

Отношение гомотопии разбивает все сильно устойчивые системы (2) порядка $2n$ на классы. Оказывается, классы гомотопии естественно нумеруются 2^n наборами из n знаков «$\pm$» и еще одним целочисленным параметром. При этом число 2^n появляется как отношение порядков групп Вейля $W_{\mathbb{C}}$ и W, а в качестве целочисленного параметра выступает элемент фундаментальной группы $\pi_1(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}))$.

Рассмотрим отображение $G_t\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, сопоставляющее начальному условию $x(0)$ значение решения $x(t)$ уравнения (2) с этим начальным условием в момент времени t. Мы получаем непрерывно дифференцируемую кривую G_t в симплектической группе $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, которая однозначно определяет исходную систему уравнений. Кривая G_t начинается в единице группы: $G_0 = E$, и если t_0 — период гамильтониана h, то $G_{t+t_0} = G_t G_{t_0}$. Преобразование $G = G_{t_0}$ называется оператором монодромии системы (2). Устойчивость и сильная устойчивость системы (2) — это свойства ее оператора монодромии.

Теорема А. *Система* (2) *устойчива тогда и только тогда, когда ее оператор монодромии диагонализуем и все его собственные числа лежат на единичной окружности.*

Действительно, устойчивость системы (2) равносильна ограниченности циклической группы $\{G^m\}$ оператора монодромии. Последнее означает, что замыкание этой группы в $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ компактно, т. е. оператор монодромии лежит в некотором торе $\mathbf{T}^n \subset \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Мы можем считать $\mathbf{T}^n$ диагональной подгруппой группы унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$. Тогда оператор монодромии устойчивой системы примет вид $G = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $|\lambda_k| = 1$.

Теорема Б. *Система* (2) *сильно устойчива, если и только если между числами λ_k нет соотношений вида $\lambda_k \lambda_l = 1$.*

Замечание. Если оператор монодромии устойчивой системы имеет некратный спектр, то система сильно устойчива. Кратность спектра означает, что $\lambda_k = \lambda_l$, либо $\lambda_k \lambda_l = 1$. Эти уравнения выделяют неподвижные точки преобразований из группы Вейля $W_{\mathbb{C}}$ на торе $\mathbf{T}^n$. Неподвижные точки преобразований из группы Вейля W задаются уравнениями $\lambda_k = \lambda_l$. Используя параметризацию Кэли, можно проверить, что разбиение на классы сопряженных элементов в окрестности оператора монодромии $G \in \mathbf{T}^n$ устроено так же, как и разбиение на классы эквивалентности квадратичных гамильтонианов в окрестности гамильтониана $h = \dfrac{\sum \omega_k (p_k^2 + q_k^2)}{2}$. При этом соотношениям $\lambda_k = \lambda_l \neq \pm 1$ отвечают кратные инварианты одного знака: $\omega_k = \omega_l \neq 0$, а соотношениям $\lambda_k \lambda_l = 1$ — инварианты разных знаков: $\omega_k + \omega_l = 0$. Замечание в п. 3.4 объясняет, почему сильная устойчивость нарушается лишь во втором случае.

Среди собственных чисел $\lambda_k^{\pm 1}$ оператора монодромии сильно устойчивой системы выберем те, которые лежат на верхней полуокружности $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$. Мы получаем корректно определенную последовательность из n показателей ± 1. При деформациях системы (2) в классе сильно устойчивых систем эта последовательность не меняется: из-за соотношений $\lambda_k \lambda_l \neq 1$ собственные числа не могут ни сойти с полуокружности, ни поменяться местами, если они имеют показатели разного знака.

Теорема В. *Операторы монодромии сильно устойчивых систем* (2) *образуют открытое множество* St_n *в симплектической группе* $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, *состоящее из 2^n связных компонент, соответствующих 2^n различным последовательностям показателей.*

На рис. 7 изображено множество St_1 в группе $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$. В общем случае почти вся граница множества St_n состоит из неустойчивых операторов. Устойчивые, но не сильно устойчивые операторы монодромии также лежат на границе и образуют множество коразмерности 3

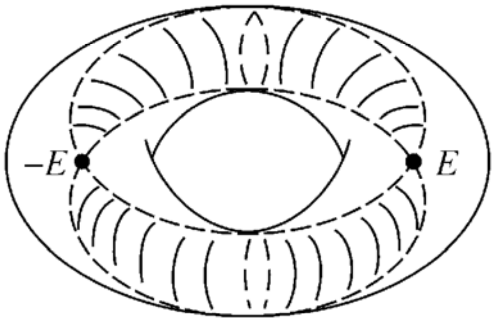


Рис. 7

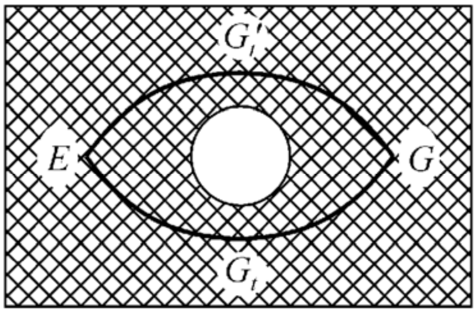


Рис. 8

в симплектической группе. В таких точках граница имеет особенность (в простейшем случае, как у квадратичного конуса в $\mathbb{R}^3$, рис. 6). Особенности границы множества сильной устойчивости вдоль стратов коразмерности 2 можно увидеть на рис. 5 б, г.

Теорема Г. *Каждая компонента множества* St_n *односвязна.*

При гомотопии системы (2) кривая G_t, $t \in [0, t_0]$, с началом в единице и концом в точке, отвечающей оператору монодромии, непрерывно деформируется в симплектической группе. Обратно, гомотопным кривым G_t соответствуют гомотопные системы (2).

Теорема Д. *Классы гомотопии систем* (2), *операторы монодромии которых лежат в той же компоненте множества* St_n, *что и оператор монодромии* G *данной системы, находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами фундаментальной группы* $\pi_1(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ (системе (2) с тем же оператором монодромии G отвечает в фундаментальной группе класс образовавшейся замкнутой кривой в $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, рис. 8).

Замечание. По-существу, мы описали относительную гомотопическую «группу» $\pi = \pi_1(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}), \mathrm{St}_n)$ в терминах точной гомотопической последовательности

$$\pi_1(\mathrm{St}_n) \to \pi_1(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})) \to \pi \to \pi_0(\mathrm{St}_n) \to \pi_0(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})),$$

где $\pi_0(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})) = 0$ (симплектическая группа связна), $\pi_1(\mathrm{St}_n) = 0$ (теорема Г), $\pi_1(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}$, $\#\pi_0(\mathrm{St}_n) = 2^n$ (теорема В).

Глава 2
Симплектические многообразия

§ 1. Локальная симплектическая геометрия

1.1. Теорема Дарбу. *Симплектической структурой* на гладком четномерном многообразии называется замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма на нем. Многообразие, снабженное симплектической структурой, называется *симплектическим многообразием.* Диффеоморфизм симплектических многообразий, переводящий симплектическую структуру одного в симплектическую структуру другого, называется симплектическим преобразованием или *симплектоморфизмом*[1].

Касательное пространство в каждой точке симплектического многообразия является симплектическим векторным пространством. Условие замкнутости в определении симплектической структуры связывает кососкалярные произведения в касательных пространствах к соседним точкам таким образом, что локальная геометрия симплектических многообразии оказывается универсальной.

Теорема Дарбу. *Симплектические многообразия одинаковой размерности локально симплектоморфны.*

Следствие. *Симплектическая структура на гладком многообразии в окрестности любой точки имеет вид $dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n$ при подходящем выборе локальных координат $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$.*

Условие невырожденности заслуживает особого обсуждения. Его отсутствие в определении Симплектической структуры сделало бы локальную классификацию таких структур необозримой. Все же в случае вырождений постоянного ранга ответ прост: замкнутая дифференциальная 2-форма постоянного коранга k в подходящих локальных координатах $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m, x_1, \ldots, x_k$ имеет вид $dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_m \wedge dq_m$.

[1] В литературе используется также традиционное название: «каноническое преобразование».

1.2. Пример: вырождения замкнутых 2-форм в $\mathbb{R}^4$. Пусть ω — замкнутая дифференциальная 2-форма общего положения на 4-мерном многообразии.

а) В общей точке многообразия форма ω невырождена и в ее окрестности при подходящем выборе координат приводится к виду Дарбу $dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$.

б) В точках гладкого трехмерного подмногообразия форма ω имеет ранг 2. В общей точке этого подмногообразия двумерное ядро формы ω трансверсально ему. В окрестности такой точки ω приводится к виду $p_1\, dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$.

в) Следующее вырождение общей формы ω происходит в точках гладкой кривой на нашем трехмерном подмногообразии. В общей точке кривой двумерное ядро формы ω касается трехмерного многообразия, но трансверсально этой кривой. В окрестности такой точки форма ω приводится к одному из двух видов

$$d\Big(x - \frac{z^2}{2}\Big) \wedge dy + d\Big(xz \pm ty - \frac{z^3}{3}\Big) \wedge dt.$$

Поле ядер формы ω высекает поле направлений на трехмерном многообразии. Линии поля, отвечающие знаку $+$ в нормальной форме, изображены на рис. 9. При знаке $-$ вращение спирали заменяется гиперболическим поворотом (см. [58], [68], [3]).

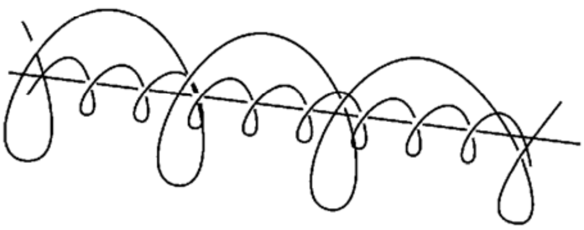


Рис. 9

г) Гиперболические и эллиптические участки нашей кривой разделены параболическими точками, в которых двумерное ядро формы ω касается и трехмерного подмногообразия, и самой кривой. Здесь известно только, что имеется по меньшей мере один модуль — непрерывный числовой параметр, различающий неэквивалентные вырождения формы в окрестности параболической точки [46].

д) Все более глубокие вырождения формы ω (например, обращение ее в нуль в изолированных точках) устранимы малым возмущением в классе замкнутых 2-форм.

1.3. Ростки подмногообразий симплектического пространства. Здесь мы обсудим вопрос, при каких условиях два ростка гладких подмногообразий симплектического пространства можно перевести друг в друга локальным диффеоморфизмом объемлющего пространства, сохраняющим симплектическую структуру. Ростки подмногообразий, для которых это возможно, мы будем называть эквивалентными. Ограничение симплектической структуры объемлющего пространства на подмногообразие определяет на нем замкнутую 2-форму, возможно, вырожденную. У эквивалентных ростков эти вырождения одинаковы, другими словами — совпадают их внутренние геометрии. Если это требование выполнено, то существует локальный диффеоморфизм объемлющего пространства, переводящий друг в друга два ростка подмногообразий вместе с ограничениями на них симплектической структуры из объемлющего пространства, но не обязательно сохраняющий саму эту структуру. Таким образом, мы можем считать, что имеются один росток подмногообразия и две симплектические структуры в окрестности подмногообразия, совпадающие при ограничении на него. Два ростка подмногообразий евклидова пространства с одинаковой внутренней геометрией могут иметь разную внешнюю геометрию. В симплектическом пространстве это не так.

Относительная теорема Дарбу I. *Пусть задан росток гладкого подмногообразия в начале координат пространства $\mathbb{R}^{2n}$ и два ростка симплектических структур ω_0 и ω_1 в окрестности начала координат, ограничения которых на это подмногообразие совпадают. Тогда существует росток диффеоморфизма пространства $\mathbb{R}^{2n}$, тождественный на подмногообразии и переводящий ω_0 в ω_1.*

Если подмногообразие — точка, мы получаем теорему Дарбу из п. 1.1.

Доказательство.

Мы применяем гомотопический метод. Можно считать, что подмногообразие — это линейное подпространство X и что дифференциальные формы ω_0 и ω_1 совпадают в начале координат (второе следует из линейной «относительной теоремы Дарбу», п. 1.2, гл. 1). Тогда $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$ — симплектические структуры в окрестности начала координат при всех $t \in [0, 1]$. Будем искать семейство диффеоморфизмов, переводящих ω_t в ω_0 и тождественных на X, или, что эквивалентно, семейство V_t векторных полей, равных нулю на X и удовлетворяющих гомологическому уравнению $L_{V_t}\omega_t + (\omega_1 - \omega_0) = 0$ (здесь L_V — производная Ли). Так как формы ω_t замкнуты, мы можем перейти к уравнению $i_{V_t}\omega_t + \alpha = 0$, где $i_V\omega$ — внутреннее произведение поля и формы, а α — 1-форма, определенная условием $d\alpha = \omega_1 - \omega_0$ однозначно с точностью до прибавления дифференциала функции. Ввиду невырожденности симплектических структур ω_t, это уравнение однозначно разрешимо при любой 1-форме α. Поэтому нам осталось показать, что форму α можно взять равной нулю в точках подпространства X. Пусть $x_1 = \ldots = x_k = 0$ — уравнения X, $y_1, \ldots, y_{2n-k}$ — остальные координаты в $\mathbb{R}^{2n}$. Так как форма $\omega_1 - \omega_0$ равна нулю на X, то

$$\alpha = \sum (x_i\alpha_i + f_i\,dx_i) + df,$$

где α_i — 1-формы, f_i, f — функции, причем f зависит только от y. Следовательно, мы можем заменить α на форму

$$\sum x_i(\alpha_i - df_i) = \alpha - d(f + \sum f_i x_i),$$

равную нулю в точках X.

1.4. Классификация ростков подмногообразий. Относительная теорема Дарбу позволяет перерабатывать информацию о вырождениях замкнутых 2-форм в результаты по классификации ростков подмногообразий симплектического пространства. Так, перечисленные в п. 1.2 вырождения замкнутых 2-форм в $\mathbb{R}^4$ реализуются ограничением стандартной симплектической структуры в $\mathbb{R}^6$ на ростки в нуле следующих 4-мерных подмногообразий ($p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ — координаты Дарбу в $\mathbb{R}^6$):

а$'$) $p_3 = q_3 = 0$;

б$'$) $q_3 = 0,\ p_1 = \dfrac{p_3^2}{2}$;

в$'$) $p_2 = q_1 q_2,\ p_3 = p_1 q_2 \pm q_1 q_3 - \dfrac{q_2^3}{3}$.

Теорема. *Росток гладкого 4-мерного подмногообразия общего положения в 6-мерном симплектическом пространстве локальной симплектической заменой переменных приводится к виду*

а$'$) — в общей точке,

б$'$) — в точках гладкого 3-мерного подмногообразия,

в$'$) — в точках на гладкой кривой, и неустойчив в изолированных (параболических) точках.

Здесь мы столкнулись с вопросом о реализации: какова наименьшая размерность симплектического пространства, в котором заданное вырождение замкнутой 2-формы реализуется ограничением симплектической структуры на подмногообразие? Ответ дает

Теорема о продолжении. *Замкнутую 2-форму на подмногообразии четномерного многообразия тогда и только тогда можно продолжить до симплектической структуры в окрестности некоторой точки, когда коранг формы в этой точке не превосходит коразмерности подмногообразия. Операцию продолжения можно сделать непрерывной в C^∞-топологии (т. е. близким формам можно сопоставить близкие продолжения).*

1.5. Внешняя геометрия подмногообразий. Мы приводим глобальные аналоги предыдущих теорем.

Относительная теорема Дарбу II. *Пусть M — четномерное многообразие, N — подмногообразие, ω_0, ω_1 — две симплектические структуры на M, ограничения которых на N совпадают. Предположим, что ω_0 и ω_1 непрерывно деформируются друг в друга в классе симплектических структур на M, совпадающих с ними на N. Тогда существуют окрестности U_0 и U_1 подмногообразия N в M и диффеоморфизм $g\colon U_0 \to U_1$, тождественный на N, который переводит $\omega_1\big|_{U_1}$ в $\omega_0\big|_{U_0}$: $g^*\omega_1 = \omega_0$.*

Отличительная трудность глобального случая состоит в том, чтобы выяснить, гомотопны ли в указанном выше смысле структуры ω_0 и ω_1: линейная комбинация $t\omega_1 + (1-t)\omega_0$ может по дороге вырождаться. Существуют примеры, показывающие, что это условие нельзя отбросить, даже если не требовать тождественности диффеоморфизма g на N. Гомотопия существует, если симплектические структуры ω_0 и ω_1 совпадают не только на векторах, касательных к N, т. е. на TN, а на всех векторах, касательных к M и приложенных в точках N, т. е. на $T_N M$. В этом случае линейная комбинация $t\omega_1 + (1-t)\omega_0$ при всех $t \in [0, 1]$ будет невырожденной в точках N и, следовательно, в некоторой окрестности N в M.

Доказательство глобальной теоремы совершенно аналогично приведенному выше для ее локального варианта. Нужно лишь вместо «интегрирования по частям» — координатного рассуждения в заключительной части доказательства — использовать следующую лемму:

Относительная лемма Пуанкаре (H. Poincaré). *Замкнутая дифференциальная k-форма на M, равная нулю на TN, в трубчатой* *окрестности N в M представляется как дифференциал $(k-1)$-формы, равной нулю на $T_N M$.*

Основа доказательства этой леммы — коническое стягивание нормального расслоения на нулевое сечение (см. [74]).

Теорема о продолжении II. *Пусть N — подмногообразие в M, и на слоях расслоения $T_N M \to M$ задано гладкое поле внешних невырожденных 2-форм, ограничение которых на подрасслоение TN определяет на N замкнутую 2-форму. Тогда это поле форм можно продолжить до симплектической структуры на окрестности подмногообразия N в M.*

Остается открытым вопрос о размерности симплектического многообразия M, в котором заданное вместе с замкнутой 2-формой многообразие N реализуется как подмногообразие. В этом направлении приведем следующий результат.

Теорема о продолжении III. *Любое многообразие N вместе с замкнутой дифференциальной 2-формой ω реализуется как подмногообразие в симплектическом многообразии M размерности $2\dim N$.*

В качестве многообразия M достаточно взять кокасательное расслоение T^*N. Проекция $\pi\colon T^*N \to N$ определяет замкнутую 2-форму $\pi^*\omega$ на T^*N, но заведомо вырожденную. Оказывается, на кокасательном расслоении существует каноническая симплектическая структура, равная нулю на нулевом сечении и в сумме с $\pi^*\omega$ снова невырожденная. С описания канонической структуры мы начнем следующий параграф.

1.6. Комплексный случай. Определение симплектической структуры и теорема Дарбу дословно переносятся на случай комплексно-аналитических многообразий. То же самое относится к содержанию п. 1.3 и теореме о продолжении III. Справедливы ли остальные результаты § 1 в комплексно-аналитической категории, неизвестно.

§ 2. Примеры симплектических многообразии

В этом разделе мы обсуждаем три источника примеров симплектических многообразий — кокасательные расслоения, комплексные проективные многообразия и орбиты коприсоединенного действия групп Ли[1].

[1]Другие конструкции, приводящие к симплектическим многообразиям (например, многообразиям геодезических), см. в пп. 1.5 и 3.2 главы 3.

2.1. Кокасательные расслоения. Определим *каноническую симплектическую структуру* на пространстве T^*M кокасательного расслоения произвольного (вещественного или комплексного) многообразия M. Сначала введем на T^*M дифференциальную 1-*форму действия* α. Точка многообразия T^*M определяется заданием линейного функционала $p \in T^*_\alpha M$ на касательном пространстве $T_\alpha M$ к M в некоторой точке $x \in M$. Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — касательный вектор к T^*M, приложенный в точке p (рис. 10). Проекция $\pi\colon T^*M \to M$ определяет касательный вектор $\pi_*\boldsymbol{\xi}$ к M, приложенный в точке x. Положим теперь $\alpha_p(\xi) = p(\pi_*\xi)$. В локальных координатах (q, p) на T^*M, где $p_1, \ldots, p_n$ — координаты на $T^*_x M$, двойственные к координатам $dq_1, \ldots, dq_n$ на $T^*_x M$, 1-форма α имеет вид $\alpha = \sum p_k\, dq_k$. Поэтому дифференциальная 2-форма $\omega = d\alpha$ задает симплектическую структуру на T^*M. Это и есть наша каноническая структура.

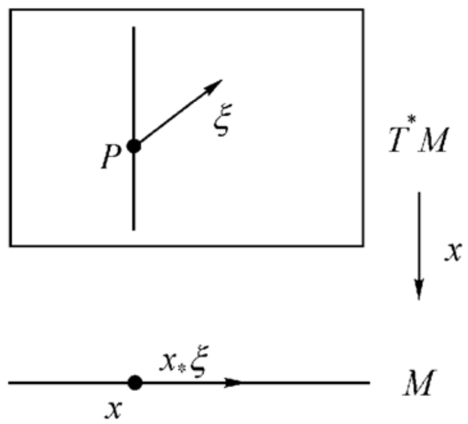


Рис. 10

Кокасательные расслоения постоянно эксплуатируются классической механикой в качестве фазовых пространств гамильтоновых систем. Базовое многообразие M называется конфигурационным пространством, а функционал p — обобщенным импульсом механической системы, имеющей «конфигурацию» $x = \pi(p)$. Пример: Конфигурации закрепленного в точке твердого тела образуют многообразие $\mathrm{SO}(3)$. Обобщенный импульс — трехмерный вектор момента импульса тела относительно точки закрепления.

2.2. Комплексные проективные многообразия. Точки комплексного проективного пространства $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ — одномерные подпространства в $\mathbb{C}^{n+1}$. Комплексным проективным многообразием называется неособое подмногообразие в $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ общих нулей системы однородных полиномиальных уравнений от координат $(z_0, \ldots, z_n)$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Оказывается, на любом k-мерном комплексном проективном многообразии, рассматриваемом как $2k$-мерное вещественное многообразие, существует симплектическая структура. Она строится так. Сначала вводится симплектическая структура на $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, являющаяся мнимой частью эрмитовой метрики на $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ (ср. п. 1.1, гл. 1). Ограничение этой симплектической структуры на проективное многообразие $M \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^n$ задает замкнутую 2-форму на M. Она является мнимой частью ограничения на M исходной эрмитовой метрики на $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, откуда следует ее невырожденность. Поэтому остается лишь предъявить обещанную эрмитову метрику на $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$.

Для этого рассмотрим эрмитову форму $\langle\, ,\, \rangle$ в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Касательное пространство в точке многообразия $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ отождествляется с эрмитовым ортогональным дополнением соответствующей прямой в $\mathbb{C}^{n+1}$ однозначно с точностью до умножения на $e^{i\varphi}$. Поэтому ограничение формы $\langle\, ,\, \rangle$ на это ортогональное дополнение однозначно определяет эрмитову форму на касательном пространстве к $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$. Построенная таким образом эрмитова метрика на $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ инвариантна относительно унитарной группы $\mathbf{U}_{n+1}$ пространства $\mathbb{C}^{n+1}$. Поэтому мнимая часть ω нашей эрмитовой метрики и ее дифференциал $d\omega$ $\mathbf{U}_{n+1}$-инвариантны. В частности, форма $d\omega$ инвариантна относительно стабилизатора $\mathbf{U}_n$ произвольной точки в $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, действующего на касательном пространстве к этой точке. Поскольку группа $\mathbf{U}_n$ содержит умножение на -1, любая $\mathbf{U}_n$ — инвариантная внешняя 3-форма в овеществлении пространства $\mathbb{C}^n$ равна нулю, откуда следует, что дифференциальная 2-форма ω замкнута.

В явном виде, пусть $\langle z, z\rangle = \sum z_k \overline{z}_k$, $w_k = \frac{z_k}{z_0}$ — аффинная карта на $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$. Тогда форма ω пропорциональна

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln\sum_{k=0}^{n}|w_k|^2,$$

где ∂, $\overline{\partial}$ — дифференциалы по голоморфным и антиголоморфным координатам соответственно. Множитель выбран таким образом, чтобы интеграл по проективной прямой $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^n$ был равен 1.

2.3. Кэлеровы и симплектические многообразия. Комплексные проективные многообразия представляют собой подкласс класса кэлеровых многообразий. Кэлеровой структурой на комплексном многообразии называется эрмитова метрика на нем, мнимая часть которой замкнута, т.е. является симплектической структурой. Как и в предыдущем пункте, комплексное подмногообразие кэлерова многообразия само кэлерово. Кэлеровы многообразия обладают специфическими геометрическими свойствами. В частности, имеет место разложение Ходжа (W. Hodge) в когомологиях компактного кэлерова многообразия M:

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \quad \overline{H}^{p,q} = H^{p,q},$$

где $H^{p,q}$ состоит из классов, представимых комплекснозначными замкнутыми дифференциальными k-формами на M типа (p, q). Последнее означает, что в базисе $dz_1, \ldots, dz_n, d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n$ комплексифицированного кокасательного пространства форма является линейной комбинацией внешних произведений p штук dz_i и q штук $d\overline{z}_j$.

С другой стороны, симплектическую структуру на многообразии всегда можно усилить до квазикэлеровой структуры, т. е. комплексной структуры на касательном расслоении и эрмитовой метрики, мнимая часть которой замкнута. Это вытекает из стягиваемости структурной группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ касательного расслоения симплектического многообразия на унитарную группу $\mathbf{U}_n$.

Пример [74]. Существуют компактные симплектические многообразия, не обладающие кэлеровой структурой. Рассмотрим в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами p_1, q_1, p_2, q_2 действие группы, порожденной следующими симплектоморфизмами:

$$\begin{aligned} &a\colon q_2 \mapsto q_2 + 1, \quad b\colon p_2 \mapsto p_2 + 1, \quad c\colon q_1 \mapsto q_1 + 1, \\ &d\colon (p_1, q_1, p_2, q_2) \mapsto (p_1 + 1, q_1, p_2, q_2 + p_2). \end{aligned}$$

По-другому это действие можно описать, как левые сдвиги в группе G матриц вида (1) элементами дискретной подгруппы $G_{\mathbb{Z}}$ целочисленных матриц.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & p_1 & q_2 & & \\ 0 & 1 & p_2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & 1 & q_1 \\ & 0 & & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1}$$

Поэтому фактор-пространство $M = G/G_{\mathbb{Z}}$ является гладким симплектическим многообразием. Функции $q_1, p_2 \pmod{\mathbb{Z}}$ задают отображение $M \to T^2$, являющееся расслоением над тором T^2 со слоем T^2, поэтому M компактно.

Фундаментальная группа $\pi_1(M)$ изоморфна $G_{\mathbb{Z}}$, а группа $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong G_{\mathbb{Z}}/[G_{\mathbb{Z}}, G_{\mathbb{Z}}]$ — коммутант $[G_{\mathbb{Z}}, G_{\mathbb{Z}}]$ порождается элементом $bdb^{-1}d^{-1} = a$, поэтому $\dim_{\mathbb{C}} H^1(M, \mathbb{C}) = 3$ — размерность пространства одномерных когомологий M нечетна! Но из разложения Ходжа следует, что у кэлерова многообразия пространства нечетномерных когомологий четномерны.

2.4. Орбиты коприсоединенного действия групп Ли. Пусть G — связная группа Ли, $\mathfrak{g} = T_eG$ — ее алгебра Ли. Действие группы на себя сопряжениями имеет неподвижную точку $e \in G$ — единицу группы. Дифференциал этого действия определяет присоединенное представление $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(T_eG)$ группы в ее алгебре Ли. Сопряженное представление $\mathrm{Ad}^*\colon G \to \mathrm{GL}(T_e^*G)$ в двойственном пространстве алгебры Ли называется *коприсоединенным представлением группы.* Соответствующее присоединенное $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Eng}(\mathfrak{g})$ и коприсоединенное $\mathrm{ad}^*\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Eng}(\mathfrak{g}^*)$ представления алгебры Ли в явном виде задаются формулами

$$\mathrm{ad}_x y = [x, y],\ x, y \in \mathfrak{g}, \quad (\mathrm{ad}_x^*\xi) \mid y = \xi([y, x]),\ x, y \in \mathfrak{g},\ \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

где $[\ ,\ ]$ — коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Теорема. *Каждая орбита коприсоединенного действия группы Ли обладает симплектической структурой.*

Она строится следующим образом. Отображение $x \mapsto \mathrm{ad}_x^*\xi$ отождествляет касательное пространство к орбите коприсоединенного представления в точке $\xi \in \mathfrak{g}^*$ с пространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\xi$, где $\mathfrak{g}_\xi = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_x^*\xi = 0\}$ — аннулятор функционала ξ. На пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\xi$ корректно определено невырожденное кососкалярное произведение $\xi([x, y])$. Замкнутость получающейся таким образом симплектической формы на орбите следует из тождества Якоби в алгебре Ли.

Следствие. *Орбиты коприсоединенного действия четномерны.*

Пример. Пусть $G = \mathbf{U}_{n+1}$. Присоединенное представление в этом случае изоморфно коприсоединенному, поэтому орбиты присоединенного действия имеют симплектическую структуру. Алгебра Ли унитарной группы состоит из косоэрмитовых операторов в $\mathbb{C}^{n+1}$. Орбита косоэрмитова оператора ранга 1 изоморфна $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, и мы получаем новое определение введенной в п. 2.2 симплектической структуры на комплексном проективном пространстве.

Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного действия играет важную роль в теории групп Ли и их представлений (см. [15], [53]).

§ 3. Скобка Пуассона

Симплектическая структура на многообразии позволяет ввести в пространстве гладких функций на этом многообразии структуру алгебры Ли — скобку Пуассона. В п. 3.1 изложена эта конструкция и сформулированы на языке скобки Пуассона свойства «законов сохранения» классической механики. Остальная часть параграфа посвящена важному обобщению понятия симплектической структуры, за основу которого взяты свойства скобки Пуассона.

3.1. Алгебра Ли функций Гамильтона (W. R. Hamilton). Пусть M — симплектическое многообразие. Кососкалярное произведение ω задает изоморфизм $I\colon T^*M \to TM$ кокасательного и касательного расслоений, т. е. соответствие между дифференциальными 1-формами и векторными полями на M, по правилу $\omega(\cdot, I\xi) = \xi(\cdot)$.

Пусть H — гладкая функция на M. Векторное поле $I\,dH$ называется *гамильтоновым полем с функцией Гамильтона* (или *гамильтонианом*) H. Эта терминология оправдывается тем, что в координатах Дарбу поле $I\,dH$ имеет вид системы уравнений Гамильтона:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Теорема А. *Фазовый поток гладкого векторного поля на M тогда и только тогда сохраняет симплектическую структуру, когда векторное поле локально гамильтоново.*

Следствие. (*Теорема Лиувилля (J. Liouville)*). *Гамильтоновый поток сохраняет фазовый объем $\omega \wedge \ldots \wedge \omega$.*

Векторные поля на многообразии образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования. Теорема А означает, что подалгебра Ли векторных полей, потоки которых сохраняют симплектическую структуру, при изоморфизме I^{-1} переходит в пространство замкнутых 1-форм.

Теорема Б. *Коммутатор в алгебре Ли замкнутых* 1*-форм на* M *имеет вид* $[\alpha, \beta] = d\omega(I\alpha, I\beta)$.

Следствие 1. *Коммутатор локально гамильтоновых полей* v_1, v_2 *— гамильтоново поле с гамильтонианом* $\omega(v_1, v_2)$.

Определим *скобку Пуассона* $\{\ ,\ \}$ в пространстве гладких функций на M формулой $\{H, F\} = \omega(I\,dH, I\,dF)$. В координатах Дарбу

$$\{H, F\} = \sum\Big(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\Big).$$

Следствие 2. *Функции Гамильтона образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона, т. е. имеют место билинейность, антикоммутативность* $\{H, F\} = -\{F, H\}$ *и тождество Якоби* (*C. G. Jacobi*)

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

Имеет место формула Лейбница (*G. W. Leibniz*)

$$\{H, F_1F_2\} = \{H, F_1\}F_2 + F_1\{H, F_2\}.$$

Применение этих формул к гамильтоновой механике основано на следующем очевидном факте.

Теорема В. *Производная функции* F *вдоль векторного поля с гамильтонианом* H *равна скобке Пуассона* $\{H, F\}$.

Следствие. *а*) *Закон сохранения энергии: функция Гамильтона является первым интегралом своего гамильтонова потока.*

б) **Теорема Э. Нётер (E. Noether):** *гамильтониан* F, *поток которого сохраняет гамильтониан* H, *является первым интегралом потока с гамильтонианом* H.

в) **Теорема Пуассона:** *скобка Пуассона первых интегралов гамильтонова потока — снова первый интеграл.*

Пример. Если в механической системе сохраняются две компоненты M_1, M_2 вектора момента импульса, то сохраняется и третья $M_3 = \{M_1, M_2\}$.

3.2. Пуассоновы многообразия. *Пуассоновой структурой* на многообразии называется билинейная операция $\{\ ,\ \}$ в пространстве гладких функций на нем, удовлетворяющая требованию антикоммутативности, тождеству Якоби и правилу Лейбница (см. следствие 2 предыдущего пункта). Эту операцию мы будем также называть *скобкой Пуассона.* Первые два свойства скобки Пуассона означают, что она задает в пространстве гладких функций на многообразии структуру алгебры Ли. Из правила Лейбница следует, что скобка Пуассона любой функции с функцией, имеющей второй порядок нуля в данной точке, обращается в этой точке в нуль, поэтому пуассонова структура определяет внешнюю 2-форму на каждом кокасательном пространстве к многообразию, гладко зависящую от точки приложения. Обратно, значение такой 2-формы на паре df, dg дифференциалов функций определяет кососимметрическое бидифференцирование $(f, g) \to (W(f, g))$ функций, то есть билинейную кососимметрическую операцию, удовлетворяющую тождеству Лейбница по каждому аргументу.

Пусть на многообразии заданы два гладких поля V и W внешних 2-форм в кокасательном расслоении. Их *скобкой Схоутена* (J.A.Schouten) $[V, W]$ называется гладкое поле 3-линейных форм на кокасательном расслоении, определенное следующей формулой

$$[V, W]((f, g, h) = V(f, W(g, h)) + W(f, V(g, h)) + \dots ,$$

где многоточием обозначены члены с циклически переставленными f, g и h.

Лемма. *Гладкое поле W внешних 2-форм на кокасательных пространствах к многообразию тогда и только тогда задает на нем пуассонову структуру, когда $[W, W] = 0$.*

В координатах пуассонова структура задается тензором

$$\sum w_{ij}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) \wedge \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big),$$

где w_{ij} — гладкие функции, удовлетворяющие условиям: при всех i, j, k $w_{ij} = -w_{ji}$ и

$$\sum_l \Big(w_{lj}\frac{\partial w_{ik}}{\partial x_l} + w_{li}\frac{\partial w_{kj}}{\partial x_l} + w_{lk}\frac{\partial w_{jl}}{\partial x_l}\Big) = 0.$$

Пуассонова структура, как и симплектическая, определяет гомоморфизм алгебры Ли гладких функций в алгебру Ли векторных полей на многообразии: производная функции g вдоль поля функции f равна $\{f, g\}$. Такие поля называются гамильтоновыми, их потоки сохраняют пуассонову структуру. Гамильтонианы, которым отвечают нулевые поля, называются *функциями Казимира* (H. Casimir) и образуют центр алгебры Ли функций. В отличие от невырожденного симплектического случая, центр может состоять не только из локально постоянных функций.

Следующая теорема помогает понять устройство пуассоновых многообразий и их связь с симплектическими. Назовем две точки пуассонова многообразия эквивалентными, если существует соединяющая их кусочно-гладкая кривая, каждый сегмент которой есть траектория гамильтонова векторного поля. Векторы гамильтоновых полей порождают касательное подпространство в каждой точке пуассонова многообразия. Его размерность называется *рангом пуассоновой структуры* в данной точке и равна рангу кососимметрической 2-формы, определенной на кокасательном пространстве.

Теорема о слоении ([16], [75]). *Класс эквивалентности любой точки пуассонова многообразия — симплектическое подмногообразие размерности, равной рангу пуассоновой структуры в этой точке.*

Таким образом, пуассоново многообразие разбивается на *симплектические слои,* которые в совокупности определяют пуассонову структуру: скобку Пуассона функции можно вычислять по их ограничениям на симплектические слои. Трансверсаль к симплектическому слою в любой точке пересекает соседние симплектические слои трансверсально по симплектическим многообразиям и в окрестности исходной точки наследует пуассонову структуру.

Теорема о расщеплении [75]. *Росток пуассонова многообразия в любой точке изоморфен (как пуассоново многообразие) произведению ростка симплектического слоя на росток трансверсального пуассонова многообразия этой точки. Последний определен однозначно с точностью до изоморфизма ростков пуассоновых многообразий.*

Эта теорема сводит изучение пуассоновых многообразий в окрестности точки к случаю точки нулевого ранга.

3.3. Линейные пуассоновы структуры. Пуассонова структура в векторном пространстве называется *линейной,* если скобка Пуассона линейных функций снова линейна. Линейная пуассонова структура в векторном пространстве — это в точности структура алгебры Ли в сопряженном пространстве; симплектические слои линейной структуры — орбиты коприсоединенного действия этой алгебры Ли, функции Казимира — инварианты этого действия.

В точке x нулевого ранга на пуассоновом многообразии корректно определена *линейная аппроксимация пуассоновой структуры* — линейная пуассонова структура на касательном пространстве этой точки (или структура алгебры Ли на кокасательном пространстве): $[d_x f, d_x g] = d_x\{f, g\}$.

Теорема об аннуляторе. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли* $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $gtg_\xi = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_x^* \xi = 0\}$ *— аннулятор* ξ *в* $\mathfrak{g}$. *Линейная аппроксимация трансверсальной пуассоновой структуры к орбите коприсоединенного действия в точке* ξ *канонически изоморфна линейной пуассоновой структуре в сопряженном пространстве аннулятора* $\mathfrak{g}_\xi$.

Изоморфизм задается отображением $\mathfrak{g}^*/\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}^*\xi \to \mathfrak{g}_\xi^*$ пространств определения рассматриваемых линейных пуассоновых структур, двойственным к вложению $\mathfrak{g}_\xi \hookrightarrow \mathfrak{g}$.

Следствие 1. *Каждый элемент полупростой алгебры Ли ранга* r *содержится в* r*-мерной коммутативной подалгебре.*

Доказательство.

1°. Одно из возможных определений полупростой алгебры Ли состоит в невырожденности ее формы Киллинга (W. Killing) $\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \cdot \mathrm{ad}_y)$. Эта форма инвариантна относительно присоединенного действия, поэтому присоединенное представление полупростой алгебры Ли изоморфно коприсоединенному.

2°. Рангом алгебры Ли называется коразмерность общей орбиты коприсоединенного действия (т. е. коранг ее пуассоновой структуры в общей точке). Из теоремы об аннуляторе следует, что ранг аннулятора $\mathfrak{g}_\xi$ любого $\xi \in \mathfrak{g}^*$ не меньше ранга $\mathfrak{g}$. Действительно, при линеаризации коразмерность общего симплектического слоя может только увеличиться!

3°. **Теорема Дюфло (M. Duflo).** *Аннулятор общего элемента* $\xi \in \mathfrak{g}^*$ *коммутативен. Действительно, симплектические слои трансверсальной пуассоновой структуры в общей точке* ξ *нульмерны, и теорема следует из* 2°. *Заметим, что размерность такого аннулятора равна рангу алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

4°. Следствие 1 получается применением 3° к аннулятору $\mathfrak{g}_x$ их элемента $x \in \mathfrak{g}$ относительно присоединенного действия, ввиду того, что x лежит в центре алгебры $\mathfrak{g}_x$.

Следствие 2. *Линейная гамильтонова система в* $\mathbb{R}^{2n}$ *имеет* n *линейно независимых квадратичных первых интегралов.*

Действительно, $\mathrm{sp}(2n, \mathbb{R})$ — простая алгебра Ли ранга n.

3.4. Проблема линеаризации. Применительно к пуассоновым структурам эта проблема звучит так: изоморфна ли пуассонова структура в окрестности точки нулевого ранга своей линейной аппроксимации в этой точке? Все предшествовавшие результаты параграфа были одинаково справедливы как в гладком, так и в голоморфном случае, ответ же на этот вопрос может зависеть от категории, в которой выполняется линеаризация.

Назовем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ (аналитически, C^∞) достаточной, если любая пуассонова структура, линейная аппроксимация которой в точке нулевого ранга изоморфна $\mathfrak{g}^*$, сама в окрестности этой точки (аналитически, C^∞) изоморфна $\mathfrak{g}^*$.

Это определение соответствует общему подходу к проблемам линеаризации в анализе: линеаризуемость трактуется как свойство линейной аппроксимации.

Описание достаточных алгебр Ли — открытая проблема. Легко убедиться, что коммутативные алгебры Ли не являются достаточными ни в каком из двух указанных смыслов. Разрешимая двумерная алгебра Ли группы аффинных преобразований прямой достаточна в каждом из них. Полупростая алгебра Ли $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ группы симплектоморфизмов плоскости аналитически достаточна, но не является C^∞-достаточной.

Теорема [39]. *Полупростая (вещественная или комплексная) алгебра Ли аналитически достаточна. Полупростая алгебра Ли компактной группы* C^∞*-достаточна.*

Заметим, что линеаризация ростка пуассоновой структуры с полупростой линейной аппроксимацией равносильна выделению в алгебре Ли функций Гамильтона полупростого дополнения к ее радикалу — нильпотентному идеалу, состоящему из функций со вторым порядком нуля в начале координат. Поэтому линеаризуемость по модулю членов достаточно высокого порядка вытекает из теоремы Леви – Мальцева (E. Levi), утверждающей существование такого дополнения в случае конечномерных алгебр Ли.

§ 4. Лагранжевы подмногообразия и расслоения

Подмногообразие симплектического многообразия (M^{2n}, ω) называется *лагранжевым,* если оно имеет размерность n и ограничение на него симплектической формы ω равно нулю. Используя терминологию § 1 главы 1, можно сказать, что лагранжевость подмногообразия — это лагранжевость его касательных пространств. Более общим образом, подмногообразие симплектического многообразия называется *(ко)изотропным*[1], если таковы его касательные пространства.

4.1. Примеры лагранжевых многообразий.

1) Гладкая кривая на симплектической поверхности — лагранжева. Гладкая кривая на симплектическом многообразии изотропна, а гиперповерхность — коизотропна.

2) Пусть $M = T^*X$, α — 1-форма действия на M, $\omega = d\alpha$ — каноническая симплектическая структура. 1-форма на многообразии сопоставляет точке многообразия ковектор в этой точке. Назовем графиком 1-формы совокупность этих ковекторов. График замкнутой 1-формы на X — лагранжево подмногообразие в M. Действительно, ограничение симплектической формы $\omega = d(p\,dq)$ на график 1-формы $\xi\colon q \mapsto p(q)$ равно $d(p(q)\,dq) = d\xi = 0$, если ξ — замкнута. Обратно, лагранжево подмногообразие в M, однозначно проектирующееся на базу, является графиком замкнутой 1-формы на X. Если эта 1-форма точна, $\xi = d\varphi$, ее потенциал φ называется *производящей функцией* лагранжева подмногообразия. Этот пример подсказывает определение обобщенной функции на X как произвольного лагранжева подмногообразия в T^*X. Слой кокасательного расслоения тоже лагранжев и соответствует «дельта-функции» точки приложения. Более общим образом, ковекторы, приложенные в точках подмногообразия $Y \subset X$ и обращающиеся в нуль на касательных к Y векторах, образуют лагранжево подмногообразие в T^*X — «дельта-функцию» подмногообразия Y.

3) Локально гамильтоново векторное поле на симплектическом многообразии M является лагранжевым подмногообразием в касательном расслоении TM, симплектическая структура которого задается его отождествлением $I\colon T^*M \to TM$ с кокасательным расслоением. Производящая функция такого лагранжева многообразия — гамильтониан поля.

[1] Коизотропные подмногообразия называют еще инволютивными.

4) Пусть задан симплектоморфизм $\gamma\colon (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$. Обозначая через π_1 и π_2 проекции прямого произведения $M_1 \times M_2$ на первый и второй сомножители, определим на нем симплектическую структуру $\pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2$. Тогда график $\Gamma \subset M_1 \times M_2$ симплектоморфизма γ — лагранжево подмногообразие.

Эти примеры иллюстрируют общий принцип: объекты симплектической геометрии изображаются лагранжевыми многообразиями.

Из относительной теоремы Дарбу II (п. 1.5.) получаем

Следствие. *Достаточно малая окрестность лагранжева подмногообразия симплектоморфна окрестности нулевого сечения в его кокасательном расслоении.*

Коранг ограничения симплектической формы на (ко)изотропное подмногообразие равен его (ко)размерности и потому постоянен. Следовательно (см. п. 1.1, гл. 2), росток (ко)изотропного подмногообразия в подходящих координатах Дарбу приводится к линейной нормальной форме п. 1.2, гл. 1.

Симплектический тип изотропного подмногообразия $N^k \subset M^{2n}$ в своей трубчатой окрестности взаимно однозначно определяется классом эквивалентности следующего $2(n-k)$-мерного симплектического векторного расслоения с базой N^k: слоем этого расслоения в точке x является факторпространство косоортогонального дополнения к касательному пространству T_xN по самому пространству T_xN. Это вытекает из результатов п. 1.5.

Если функция Гамильтона постоянна на изотропном подмногообразии, то его сдвиги потоком этой функции заметают изотропное подмногообразие. Коизотропное подмногообразие на поверхности уровня функции Гамильтона инвариантно относительно ее потока. Эти утверждения вытекают из того, что одномерное ядро ограничения симплектической формы на гиперповерхность уровня функции Гамильтона совпадает с направлением вектора гамильтонова поля. Свойства такого рода будут часто использоваться в дальнейшем без специальных оговорок.

4.2. Лагранжевы расслоения. *Лагранжевым расслоением* называется гладкое локально тривиальное расслоение симплектического многообразия, все слои которого лагранжевы.

Пример. Кокасательное расслоение лагранжево.

Напомним, что аффинная структура на многообразии задается атласом, у которого функции перехода от одной карты к другой являются аффинными преобразованиями координатного пространства (параллельными переносами, линейными преобразованиями или их композициями).

Теорема об аффинной структуре. *Слои лагранжева расслоения имеют каноническую аффинную структуру.*

Доказательство.

Пусть $\pi\colon M \to X$ — лагранжево расслоение. Тогда функции на X, рассматриваемые как гамильтонианы на M, задают там коммутирующие гамильтоновы потоки. Функция с нулевым дифференциалом в точке $x \in X$ определяет поток, неподвижный на слое $\pi^{-1}(x)$. Таким образом, окрестность любой точки слоя является локальной орбитой действия без неподвижных точек аддитивной группы пространства $T^*_x X$.

Теорема Дарбу для расслоений. *Лагранжево расслоение в подходящих локальных координатах Дарбу (p, q) задается проекцией на q-пространство вдоль p-пространства.*

Доказательство.

Выбор лагранжева сечения лагранжева расслоения отождествляет его (конструкцией из доказательства предыдущей теоремы) с кокасательным расслоением базы. Нетрудно проверить, что это отождествление — симплектоморфизм. ■

Задание в лагранжевом расслоении структуры кокасательного расслоения называется *поляризацией.* Лагранжево расслоение вместе с поляризацией однозначно определяется своей 1-формой действия α в окрестности точки, где α обращается в нуль: симплектическая структура — это $d\alpha$, нулевое сечение состоит из точек, где α обращается в нуль, а эйлерово поле однородных растяжений в слоях кокасательного расслоения есть $-I\alpha$.

Мы видели, что лагранжево расслоение в окрестности точки пространства расслоения устроено стандартным образом — как кокасательное расслоение в окрестности точки нулевого сечения. Глобально картина совсем иная. Во-первых, слои лагранжева расслоения не обязаны быть изоморфными как многообразия с аффинной структурой, во-вторых, расслоения с одинаковыми слоями могут иметь различную глобальную структуру, наконец, изоморфные аффинные расслоения не обязательно изоморфны как лагранжевы расслоения (т. е. с сохранением симплектической структуры).

Назовем лагранжево расслоение полным, если его слои полны как аффинные многообразия[1]. В частности, лагранжево расслоение с компактным слоем полно.

Классификация лагранжевых слоев. Связная компонента слоя полного лагранжева расслоения аффинно изоморфна произведению аффинного пространства на тор.

Действительно, полнота расслоения означает, что каждая компонента слоя является фактор-пространством группы сдвигов $\mathbb{R}^n$ по дискретной подгруппе. Такие подгруппы исчерпываются решетками $\mathbb{Z}^k \subset \mathbb{R}^n$, $k \neq n$.

Следствие. *Связный компактный слой лагранжева расслоения — тор.*

Опишем теперь полные лагранжевы расслоения с аффинным слоем. *Скрученным кокасательным расслоением* называется кокасательное расслоение $\pi\colon T^*X \to X$ с симплектической структурой в T^*X, равной сумме канонической симплектической формы и формы $\pi^*\varphi$, где φ — замкнутая 2-форма на базе X. Мы ужа встречались с этой конструкцией в конце § 1.

Теорема. *Скрученное кокасательное расслоение определяется классом когомологий формы φ в $H^2(X, \mathbb{R})$ однозначно с точностью до изоморфизма лагранжевых расслоений (тождественного по базе). Любое полное лагранжево расслоение со связным односвязным слоем изоморфно скрученному кокасательному расслоению.*

Доказательство.

Пусть $\pi\colon (M, \omega) \to X$ — лагранжево расслоение, слои которого — аффинные пространства. Сечение $s\colon X \hookrightarrow M$ определяет замкнутую форму $\varphi = s^*\omega$, причем $\omega - \pi^*\varphi$ — симплектическая структура на M, в которой $s(X)$ — лагранжево. Принимая s за нулевое сечение, конструкцией теоремы об аффинной структуре отождествляем M с T^*X. Замена нулевого сечения на s' изменяет φ на ds', поэтому класс $[\varphi] \in H^2(X, \mathbb{R})$ — единственный инвариант окрученного кокасательного расслоения. ■

[1]То есть аффинные прямые, определенные локально, неограниченно продолжаются.

Пример топологически нетривиального лагранжева расслоения с компактным слоем нам уже встречался в п. 2.3 о кэлеровых структурах: мы предъявили симплектическое многообразие M^4, лагранжево расслоенное над тором T^2 со слоем T^2, не гомеоморфное $T^2 \times T^2$. Оказывается, компактность слоя лагранжева расслоения накладывает очень жесткие условия на его базу.

Теорема. *База лагранжева расслоения со связным компактным слоем имеет каноническую целочисленную аффинную структуру* (*другими словами, в некотором атласе на базе функции перехода суть композиции сдвигов и целочисленных линейных преобразований в* $\mathbb{R}^n$).

Доказательство.

Отождествление слоя T^n над точкой x базы X с орбитой группы $T^*_x X$ задает в $T^*_x X$ решетку максимального ранга. Непрерывный базис такой решетки — это набор 1-форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на X. Симплектичность сдвигов на векторы решетки в $T^*_x X$ означает, что эти формы замкнуты. Локальный потенциал $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon X \to \mathbb{R}^n$ этого базиса, $d\varphi_i = \alpha_i$, определяет карту искомого атласа. ■

4.3. Пересечения лагранжевых многообразии и неподвижные точки симплектоморфизмов. Проблема существования периодических движений динамических систем привела Пуанкаре к следующей теореме.

Геометрическая теорема Пуанкаре. *Гомеоморфизм плоского кругового кольца на себя, сохраняющий площади и сдвигающий граничные окружности в разные стороны, имеет не менее двух неподвижных точек.*

Граничное условие в теореме означает, что отображение имеет вид $X = x + f(x, y)$, $Y = y + g(x, y)$, где X, x — радиальные, Y, y — угловые координаты в кольце, а функции f, g непрерывны и 2π-периодичны по y, причем g имеет на разных границах кольца разные знаки.

Доказательство этой теорем принадлежит Дж. Д. Биркгофу (G. D. Birkhoff). А. Пуанкаре удалось доказать ее лишь при некоторых ограничениях, но его метод менее специален, чем доказательство Биркгофа, и поддается обобщению. Рассуждение Пуанкаре основано на том, что неподвижные точки симплектоморфизма кольца — это в точности критические точки функции $F(u, v) = \int (f\, dv - g\, du)$, где $u = \dfrac{(X+x)}{2}$, $v = \dfrac{(Y+y)}{2}$, правда в предположении, что якобиан $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ отличен от нуля. Это условие выполнено автоматически, если симплектоморфизм не слишком далек от тождественного.

Перенесение рассуждения Пуанкаре в общую симплектическую ситуацию приводит к следующим понятиям и результатам.

Пусть M — симплектическое многообразие. Симплектоморфизм $\gamma\colon M \to M$ задается лагранжевым графиком $\Gamma \subset M \times M$. Неподвижные точки γ — это точки пересечения Γ с графиком Δ тождественного симплектоморфизма. Трубчатая окрестность Δ в $M \times M$ имеет структуру лагранжева расслоения $T^*\Delta$. Если симплектоморфизм γ достаточно близок к тождественному, то он задается производящей функцией (вообще говоря, многозначной) лагранжева сечения $\Gamma \subset T^*\Delta$. Ее критические точки и неподвижные точки γ совпадают.

Будем говорить, что симплектоморфизм γ *гомологичен тождественному,* если он соединяется с тождественным семейством симплектоморфизмов, поле скоростей которого при каждом значении параметра семейства глобально гамильтоново. Гомологичные тождественному симплектоморфизмы образуют коммутант группы симплектоморфизмов многообразия M (см. [1]).

Лемма. *Гомологичный и близкий (вместе с первыми производными) к тождественному симплектоморфизм имеет однозначную производящую функцию.*

Теорема А. *Гомологичный и близкий к тождественному симплектоморфизм компактного симплектического многообразия имеет неподвижные точки. Их число не меньше числа критических точек, которое, самое меньшее, может иметь гладкая функция на этом многообразии.*

Гипотеза А. *Предыдущая теорема верна без условия близости симплектоморфизма к тождественному.*

Гипотеза доказана в двумерном случае: гомологичный тождественному симплектоморфизм компактной римановой поверхности имеет для сферы не менее 2, а в случае сферы с ручками — не менее 3 неподвижных точек. Доказательства этих теорем[1] носят существенно дву-

[1]Первая принадлежит А. И. Шпирсльману и Н. А. Никитину, вторая — Я. М. Элнашбергу.

мерный характер. Так, в случае сферы доказательство основано на том, что индекс изолированной особой точки гамильтонова векторного поля на плоскости равен единице минус половина числа компонент, на которые линия критического уровня гамильтониана делит окрестность особой точки, и, тем самым, не превосходит единицы.

Заметим, что теорема Пуанкаре о симплектоморфизме кольца вытекает из (доказанной) гипотезы А для двумерного тора. Из двух экземпляров кольца можно склеить тор. Гомологичные тождественному симплектоморфизмы тора $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ — это в точности такие, которые оставляют на месте центр тяжести единичного квадрата в $\mathbb{R}^2$ [1]. Последнего нетрудно добиться, добавляя между склеиваемыми кольцами соединительные полоски и продолжая симплектоморфизм так, чтобы он не имел неподвижных точек на этих полосках (при этом придется использовать вращение границ кольца в разные стороны).

Будем называть два лагранжевых подмногообразия симплектического многообразия N (лагранжево) изотопными, если одно переходит в другое под действием симплектоморфизма, гомологичного тождественному. В частности, изотопные лагранжевы подмногообразия диффеоморфны.

Теорема Б. *Компактное лагранжево подмногообразие, изотопное и близкое к данному, имеет с ним столько точек пересечения, сколько имеет критических точек некоторая гладкая функция на этом многообразии.*

Гипотеза Б. *Теорема Б верна без предположения близости изотопных лагранжевых подмногообразий.*

Из гипотезы (теоремы) Б следует гипотеза (теорема) А: график $\Gamma \subset M \times M$ гомологичного тождественному симплектоморфизма $\gamma\colon M \to M$ является лагранжевым подмногообразием, изотопным диагонали Δ.

Без предположения изотопии точки пересечения компактного лагранжева подмногообразия со своим лагранжевым возмущением (о которых идет речь в теореме Б) могут отсутствовать. Все же точки пересечения обязательно есть, если эйлерова характеристика лагранжева многообразия отлична от нуля либо если каждая замкнутая 1-форма на этом многообразии-дифференциал функции. Оказывается, отсутствие точек пересечения компактного лагранжева подмногообразия со своим лагранжевым возмущением означает, что это многообразие расслаивается над окружностью.

Недавно новым методом было достигнуто продвижение в доказательстве гипотез А и Б в многомерном случае. А именно, гипотеза А доказана для симплектоморфизмов тора $\mathbf{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой, равно как гипотеза Б доказана для лагранжева тора $\mathbf{T}^n$, вложенного в стандартный симплектический тор $\mathbf{T}^{2n}$ в качестве подгруппы, и произвольной лагранжевой изотопии тора $\mathbf{T}^n$ [69]. Заметим, что гладкая функция на n-мерном торе имеет не менее $n+1$ критической точки и не менее 2^n, считая с кратностями [24].

Желая продемонстрировать суть метода, мы приведем набросок доказательства следующего утверждения.

Теорема. *Пусть на стандартном симплектическом $2n$-мерном торе задан периодически зависящий от времени гамильтониан. Тогда симплектическое преобразование тора за период потоком этого гамильтониана имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

1°. Представляя $\mathbf{T}^{2n}$ как фактор-пространство $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ стандартного симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$, рассмотрим векторное пространство Ω петель — гладких отображений $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{2n}$ с линейной структурой поточечного сложения и умножения на скаляры и евклидовой структурой

$$\int\limits_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \frac{(p^2+q^2)}{2}\,dt.$$

На пространстве Ω введем функционал действия

$$F = \int\limits_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \left[\frac{(p\,dq - q\,dp)}{2} - H\right] dt,$$

где $H(p,\,q,\,t)$ — заданный периодический гамильтониан с периодом 1. Различным критическим точкам функционала $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ отвечают различные периодические траектории с периодом 1 потока гамильтониана H, т. е. различные неподвижные точки интересующего нас симплектоморфизма.

2°. Градиент $\nabla F\colon \Omega \to \Omega$ имеет вид $\nabla F = -Jd/dt - \nabla H$, где $J\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — оператор «умножения на $\sqrt{-1}$», $J(p,\,q) = (-q,\,p)$. Мы рассматриваем отображение ∇F как возмущение линейного оператора $A = -J\dfrac{d}{dt}$. Спектр оператора A есть $2\pi\mathbb{Z}$, а собственное пространство с собственным числом λ есть $2n$-мерное пространство решений с периодом 1 линейной гамильтоновой системы с гамильтонианом $\dfrac{\lambda(p^2+q^2)}{2}$. Разложение петли $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{2n}$ по собственным функциям оператора A есть просто ее разложение в ряд Фурье (J. Fourier). Возмущение $B = \nabla H$ имеет ограниченный образ ($\|B(\omega)\| < C$) и ограниченную норму: $\|B(\omega_1) - B(\omega_2)\| \leqslant D\|\omega_1 - \omega_2\|$.

3°. Представим пространство Ω в виде прямой суммы конечномерного пространства V, натянутого на «низкие гармоники» с частотой $|\lambda| < 2D$, и бесконечномерного пространства W «высоких гармоник». Уравнение $\nabla F = 0$ разбивается на два: $\dfrac{\partial F}{\partial V} = 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial W} = 0$. Второе имеет вид $Aw + PB(v+w) = 0$, где P — проектор Ω на W. Так как оператор $w \mapsto -A^{-1}PB(v+w)$ сжимающий, второе уравнение при каждом v имеет единственное решение $w = w(v)$. Поэтому поиск экстремумов функционала F сводится к отысканию критических точек функции $f(v) = F(v,\, w(v))$ на конечномерном пространстве.

4°. Постоянным петлям, образующим ядро оператора A, отвечает нулевое решение уравнения $\dfrac{\partial F}{\partial W} = 0$, поэтому функция f периодична на подпространстве таких петель. Таким образом, функция f, по-существу, определена на многообразии $\mathbf{T}^{2n} \times \mathbb{R}^N_{\lambda>0} \times \mathbb{R}^N_{\lambda<0}$. Ее поведение на бесконечности определяется невозмущенным функционалом и имеет гиперболический характер (рис. 11), из чего следует наличие критических точек (например, множество точек, где значение функции меньше данного, претерпевает топологическую перестройку).

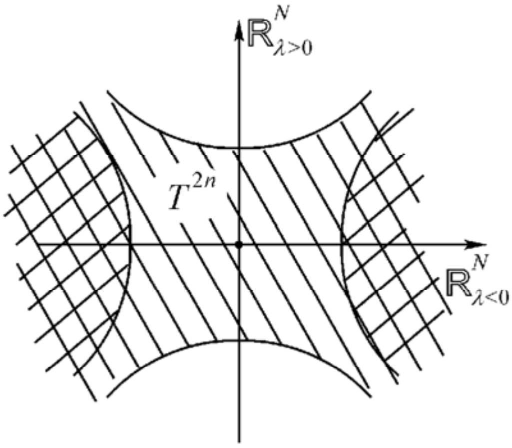


Рис. 11

Замечание. Дальнейший анализ этой конечномерной ситуации средствами, разработанными в теории Морса (M. Morse) [60], приводит к точной оценке числа неподвижных точек ($\geqslant 2n+1$). Основное отличие приведенного рассуждения от стандартного формализма глобального вариационного исчисления состоит в том, что невозмущенный квадратичный функционал на пространстве петель не эллиптичен, а гиперболичен.

Глава 3
Симплектическая геометрия и механика

Здесь рассмотрена связь симплектической геометрии с вариационным исчислением, в частности — с механикой Лагранжа (J.L.Lagrange), дано геометрическое введение в теорию вполне интегрируемых систем и описана процедура понижения порядка гамильтоновых систем, обладающих непрерывной группой симметрий. Систематическое изложение вопросов классической механики см. в томе 3, теории интегрируемых систем — в статье Б. А. Дубровина, И. М. Кричевера и С. П. Новикова.

§ 1. Вариационные принципы

Движения механической системы суть экстремали подходящего вариационного принципа. С другой стороны, любая задача вариационного исчисления может быть сформулирована на языке симплектической геометрии.

1.1. Лагранжева механика. *Натуральная механическая система* задается кинетической и потенциальной энергией. *Потенциальная энергия* — это гладкая функция на *многообразии конфигураций* (положений) системы, *кинетическая энергия* — это риманова метрика на конфигурационном многообразии, т. е. положительно определенная квадратичная форма на каждом касательном пространстве к многообразию конфигураций, гладко зависящая от точки приложения.

Пример. Система материальных точек в евклидовом пространстве имеет кинетическую энергию $T = \sum \frac{m_k \dot{r}_k^2}{2}$ и потенциальную энергию $U = \sum V_{kl}(r_k - r_l)$, где r_k — радиус вектор k-й точки, V_{kl} — потенциал попарного взаимодействия материальных точек, скажем, ньютонов гравитационный потенциал $V_{kl}(r) = -\gamma m_k m_l / |r|$.

Из кинетической и потенциальной энергий составляется *лагранжиан* или *функция Лагранжа* $L = T - U$ на пространстве касательного расслоения конфигурационного многообразия. Движение $t \mapsto q(t)$ натуральной системы в пространстве конфигураций является экстремалью функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q(t),\, \dot q(t))\, dt. \tag{1}$$

Более общо, рассматривая произвольную функцию Лагранжа $L\colon TM \to \mathbb{R}$ на касательном расслоении конфигурационного многообразия и называя движением экстремали функционала (1), получаем определение *лагранжевой механической системы.* Можно допустить также явную зависимость лагранжиана от времени. Экстремали функционала (1) локально описываются системой дифференциальных *уравнений Эйлера – Лагранжа* (L. Euler) $(d/dt)\partial L/\partial \dot q = \partial L/\partial q$. Для системы материальных точек в евклидовом пространстве уравнения Эйлера – Лагранжа принимают вид системы уравнений Ньютона $m_k \ddot r_k = -\dfrac{\partial U}{\partial r_k}$. Таким образом, механика Лагранжа обобщает механику Ньютона, допуская к рассмотрению, например, системы материальных точек, стесненных голономными (жесткими) связями — конфигурационные многообразия таких систем уже не являются областями координатных пространств. В то же время лагранжев подход к механике позволяет считать ее частным случаем вариационного исчисления. Например, задача о «свободном» движении натуральной системы ($U \equiv 0$) равносильна описанию геодезического потока на конфигурационном многообразии с римановой метрикой T (см. п. 1.3).

Пример. Рассмотрим абсолютно твердое тело, одна из точек которого закреплена в начале координат пространства $\mathbb{R}^3$. Конфигурационным многообразием такой системы является группа вращений $\mathbf{SO_3}$. Касательное пространство к конфигурационному многообразию в каждой точке отождествляется с пространством $\mathbb{R}^3$: направление вектора $\omega \in \mathbb{R}^3$ указывает ось и направление инфинитезимального вращения тела, а длина вектора — угловую скорость вращения. Кинетическая энергия вращения — $T = \dfrac{I\omega^2}{2}$, где I — момент инерции тела относительно оси вращения, т. е. кинетическая энергия задается во внутренних координатах тела квадратичной формой инерции. Таким образом, свободное вращение твердого тела, закрепленного в точке, описывается геодезическим потоком на группе $\mathbf{SO_3}$ римановой метрики, (лево)инвариантной относительно сдвигов на группе.

1.2. Гамильтонова механика. *Гамильтонова* механическая *система* задается гладкой функцией — *гамильтонианом* — на симплектическом многообразии (*фазовом пространстве*). Движение в гамильтоновой системе описывается фазовым потоком соответствующего гамильтонова векторного поля (см. п. 3.1, гл. 2). Гамильтониан H, явным образом зависящий от времени, задает неавтономную гамильтонову систему. В координатах Дарбу система уравнений Гамильтона имеет вид $\dot{p} = -H_q$, $\dot{q} = H_p$.

Механика Гамильтона обобщает механику Лагранжа.

Пример 1. Система уравнений Эйлера–Лагранжа натуральной системы с конфигурационным многообразием M, кинетической энергией T и потенциальной U при изоморфизме касательного и кокасательного расслоений многообразия M, определяемом римановой метрикой $2T$, превращается в систему уравнений Гамильтона с гамильтонианом $T+H$ относительно канонической симплектической структуры на пространстве кокасательного расслоения.

В общем случае определим гамильтониан $H\colon T^*M \to \mathbb{R}$ как послойное преобразование Лежандра лагранжиана $L\colon TM \to \mathbb{R}$. *Преобразование Лежандра* (A. M. Legendre) выпуклой функции f векторного аргумента v определяется как функция f^* двойственного аргумента p формулой $f^*(p) = \max\limits_v [\langle p, v\rangle - f(v)]$ (рис. 12, ср. п. 1.1, гл. 5). Например, преобразование Лежандра евклидовой формы $\dfrac{\langle Av, v\rangle}{2}$ есть $\dfrac{\langle p, A^{-1}p\rangle}{2}$.

Мы будем предполагать, что отображение $T_qM \to T_q^*M$ такое, что $\dot{q} \mapsto p = L_{\dot{q}}$ — диффеоморфизм для каждого $q \in M$. Тогда гамильтониан H — гладкая функция на пространстве кокасательного расслоения, $H(p, q) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$, где q определяется из уравнения $p = L_{\dot{q}}(q, \dot{q})$.

Теорема. *При указанном отождествлении пространств касательного и кокасательного расслоений механическая система с функцией Лагранжа L переходит в гамильтонову систему с гамильтонианом H.*

Пример 2. Натуральная система в магнитном поле. Пусть лагранжиан есть сумма лагранжиана натуральной системы и дифференциальной 1-формы A на конфигурационном многообразии M, рассматриваемой как функция на TM, линейная по скоростям: $L = T - U + A$. Соответствующая система уравнений Эйлера–Лагранжа на TM гамильтонова с функцией Гамильтона $H = T+U$ относительно симплектической

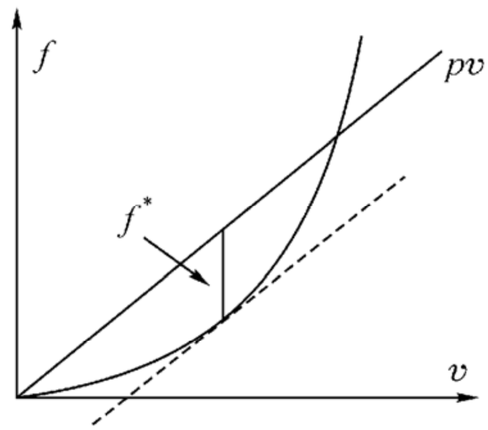


Рис. 12

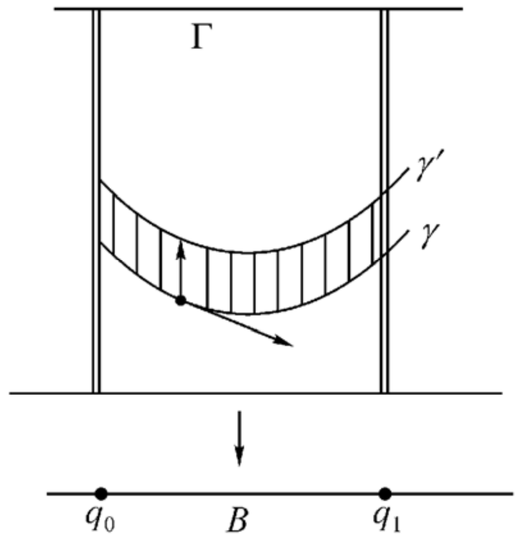


Рис. 13

структуры $\Omega+dA$, где Ω — симплектическая структура примера 1. Если 1-форма A — многозначный «вектор-потенциал магнитного поля» dA, определенного однозначно на M, то фазовое пространство оказывается скрученным кокасательным расслоением (п. 4.2, гл. 2).

1.3. Принцип наименьшего действия. Тот факт, что задачи вариационного исчисления имеют гамильтонову природу, объясняется присутствием вариационного принципа в самом гамильтоновом формализме. В основе этого принципа лежит следующее замечание: поле направлений гамильтонова векторного поля на неособой гиперповерхности уровня его гамильтониана совпадает с *полем характеристических направлений* этой *гиперповерхности* — полем косоортогональных дополнений ее касательных гиперплоскостей.

Пусть симплектическое многообразие M поляризовано: $M=T^*B$, $\alpha=\sum p_k\,dq_k$ — 1-форма действия на M.

Теорема (принцип наименьшего действия). *Интегральные кривые поля характеристических направлений неособой гиперповерхности $\Gamma\subset T^*B$, трансверсальной слоям кокасательного расслоения $T^*B\to B$, являются экстремалями интеграла действия $\int\alpha$ в классе кривых, лежащих на Γ и соединяющих слои $T^*_{q_0}B$ и $T^*_{q_1}B$ точек q_0 и q_1 базы B.*

Доказательство.

Приращение интеграла действия $\int\limits_{\gamma'}\alpha-\int\limits_{\gamma}\alpha$ (рис. 13) равно симплектической площади пленки, соединяющей кривые γ и γ', и, в случае, если γ — интегральная кривая, является бесконечно малым более высокого порядка, чем отличие кривых γ и γ'. ■

Замечание. Интегральные кривые неавтономной системы уравнений с функцией Гамильтона $H(p, q, t)$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n*} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ являются экстремалями интеграла действия

$$\int_{t_0}^{t_1} (p\,dq - H\,dt)$$

в классе кривых $t \mapsto (p(t), q(t), t)$ с граничными условиями $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$.

Следствие. *Материальная точка, вынужденная оставаться на гладком римановом многообразии, движется по геодезической линии (т. е. по экстремали длины* $\int ds$*).*

Действительно, в случае свободного движения с кинетической энергией $T = (ds/dt)^2/2$ параметр t обеспечивающий фиксированное значение энергии $H = T = h$, должен быть пропорционален длине $dt = ds/\sqrt{2h}$, а интеграл действия принимает вид

$$\int p\,dq = \int p\dot{q}\,dt = \int 2T\,dt = \sqrt{2h}\int ds.$$

В случае, когда потенциальная энергия отлична от нуля, траектории натуральной системы также являются геодезическими некоторой римановой метрики: в области конфигурационного пространства, где $U(q) < h$, траектории системы с кинетической энергией $T = (ds/dt)^2/2$, потенциальной $U(q)$ и полной энергией h будут геодезическими линиями метрики $(h - U(q))\,ds^2$.

В качестве применения рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в потенциальном поле. При достаточно больших h риманова метрика $(h - U)ds^2$ определена на всем компактном конфигурационном пространстве $\mathbf{SO}_3$. Пространство $\mathbf{SO}_3$ не односвязно (оно диффеоморфно $\mathbb{R}\mathbf{P}^3$ и имеет двулистное односвязное накрытие S^3).

Выберем в классе всех нестягиваемых замкнутых кривых в $\mathbf{SO}_3$ кривую минимальной длины (это возможно [60]) относительно введенной римановой метрики. Мы получаем

Следствие. *Твердое тело в любом потенциальном поле имеет по меньшей мере по одному периодическому движению при каждом достаточно большом значении полной энергии.*

Можно показать [60], что на компактном римановом многообразии каждый элемент фундаментальной группы представляется замкнутой геодезической. Отсюда получается аналог предыдущего следствия для любой натуральной системы с компактным неодносвязным конфигурационным пространством.

1.4. Вариационные задачи со старшими производными. Опишем гамильтонов формализм задачи минимизации функционала

$$\int_a^b L(x^{(0)}, \ldots, x^{(n+1)})dt \tag{2}$$

в классе гладких кривых $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ с заданным на концах отрезка $[a, b]$ разложением Тейлора до порядка n включительно, где лагранжиан L зависит от производных $x^{(k)} = d^k x/dt^k$ кривой $x(t)$ до порядка $n+1$. Экстремали функционала (2) удовлетворяют *системе уравнений Эйлера – Пуассона*

$$L_{x^{(0)}} - \frac{d}{dt}L_{x^{(1)}} + \frac{d^2}{dt^2}L_{x^{(2)}} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}L_{x^{(n+1)}} = 0, \tag{3}$$

выражающей обращение в нуль первой вариации функционала (2). Рассмотрим теперь лагранжиан $L(x, y, \ldots, z, w)$ как функцию точки кривой $(x, y, \ldots, z, w)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{(n+2)l}$, удовлетворяющей ограничениям $dx = y\,dt, \ldots, dz = w\,dt$, и составим форму действия по правилу множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned}\alpha &= p_x(dx - y\,dt) + \ldots + p_z(dz - w\,dt) + L\,dt = \\ &= [p_x(\dot{x} - y) + \ldots + p_z(\dot{z} - w) + L(x, y, \ldots, z, w)]\,dt.\end{aligned}$$

Экстремали функционала $\int \alpha$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера – Лагранжа в $\mathbb{R}^{(2n+3)l}$:

$$\begin{gathered}\dot{x} = y, \ \ldots, \ \dot{z} = w; \\ \dot{p}_x = \frac{\partial L}{\partial x}, \ \dot{p}_y = -p_x + \frac{\partial L}{\partial y}, \ \ldots, \ \dot{p}_z = -p_z + \frac{\partial L}{\partial w}.\end{gathered} \tag{4}$$

Эта система эквивалентна системе уравнений Эйлера – Пуассона (3). Введем симплектическую форму $\omega = dp_x \wedge dx + \ldots + dp_z \wedge dz$ и определим с помощью преобразования Лежандра по переменным w функцию Гамильтона

$$\begin{gathered} H(x,\, y,\, \ldots\, ,\, z,\, p_z,\, \ldots\, ,\, p_y,\, p_x) = \\ = p_x y + \ldots + p_z W - L(x,\, y,\, \ldots\, ,\, z,\, W) \end{gathered}$$

($W(x,\, y,\, \ldots\, ,\, z,\, p_z)$ определяется из уравнения $p_z = \dfrac{\partial L}{\partial w}$). Система уравнений Гамильтона с гамильтонианом H и симплектической структурой ω в $\mathbb{R}^{(2n+2)l}$ вместе с уравнением $p_z = \dfrac{\partial L}{\partial w}$ совпадает с (4). Таким образом, при условии выпуклости лагранжиана $L(x^{(0)},\, \ldots\, ,\, x^{(n+1)})$ по переменным $x^{(n+1)}$, система уравнений Эйлера – Пуассона (3) эквивалентна гамильтоновой системе $(H,\, \omega)$.

Выписав, таким образом, координатные формулы, мы теперь придадим инвариантный смысл как самой вариационной задаче (2), так и ее гамильтоновой версии.

При замене пространства $\mathbb{R}^l$ на произвольное l-мерное многообразие M функционал типа (2) естественно задавать функцией Лагранжа $L\colon J^{n+1} \to \mathbb{R}$ на многообразии $(n+1)$-струй в нуле кривых $x\colon \mathbb{R} \to M$. Многообразие J^{n+1} определяется по индукции вместе с проекцией $J^{n+1} \to J^n$ (рис. 14) как аффинное подрасслоение в касательном расслоении TJ^n, состоящее из тех касательных векторов $\xi \in T_{j^n}J^n$, которые при дифференциале $\pi_*\colon T_{j^n}J^n \to T_{n(j^n)}J^{n-1}$ проекции π: $J^n \to J^{n-1}$ переходят в свою точку приложения: $\pi^*(\xi) = J^n \in TJ^{n-1}$. При этом $J^0 = M$, $J^1 = TM$.

$$\begin{tikzcd}
 & TJ^n \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d] & TJ^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \text{---} \arrow[r] & TJ^1 \arrow[r] \arrow[d] & TJ^0 \arrow[d] \\
J^{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, hook] & J^n \arrow[r, "\pi"'] \arrow[ur, hook] & J^{n-1} \arrow[r] & \text{---} \arrow[r] \arrow[ur, hook] & J^1 \arrow[r] \arrow[ur, equal] & J^0 = M
\end{tikzcd}$$

Рис. 14

Фазовым пространством гамильтоновой системы, отвечающей лагранжиану $L\colon J^{n+1} \to \mathbb{R}$, является пространство T^*J^n кокасательного расслоения с канонической симплектической структурой. Пусть функция L выпукла на каждом аффинном слое расслоения $J^{n+1} \to J^n$. Построим функцию $H\colon T^*J^n \to \mathbb{R}$ следующим образом. Ковектор p, приложенный в точке $j \in J^n$, определяет линейную неоднородную функцию на слое $W \subset T_jJ^n$ расслоения $J^{n+1} \to J^n$. Положим $H(p) = \max\limits_{w \in W}(p(w) - L(w))$.

Теорема Остроградского. *Система уравнений Эйлера – Пуассона, которой удовлетворяют экстремали лагранжиана $L\colon J^{n+1} \to \mathbb{R}$, где L — гладкая функция, строго выпуклая*[1] *на каждом слое расслоения $J^{n+1} \to J^n$, эквивалентна гамильтоновой системе с фазовым пространством T^*J^n и функцией Гамильтона H.*

Замечание. В случае явной зависимости лагранжиана функционала (2) от времени система уравнений Эйлера – Пуассона эквивалентна неавтономной гамильтоновой системе на расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times T^*J^n$.

1.5. Многообразие характеристик. Предположим, что интегральные кривые поля характеристических направлений на гладкой гиперповерхности в симплектическом многообразии образуют гладкое многообразие (локально это всегда так). Мы будем называть его *многообразием характеристик.*

Теорема. *Многообразие характеристик имеет симплектическую структуру* (*она корректно определена условием*: *кососкалярное произведение векторов, касательных к гиперповерхности, равно кососкалярному произведению их проекций вдоль характеристик*).

Пусть гамильтонова система с гамильтонианом H имеет первый интеграл F, и M — многообразие характеристик гиперповерхности $F = \mathrm{const}$. Функция H постоянна на характеристиках этой гиперповерхности и определяет гладкую функцию $\widetilde{H}$ на M. Поле гамильтониана H на гиперповерхности $F = \mathrm{const}$ при проекции на M определяет гамильтоново векторное поле на M с гамильтонианом $\widetilde{H}$.

Следствие 1. *Первый интеграл гамильтоновой системы позволяет понизить ее порядок на две единицы.*

Параметризованные экстремали вариационной задачи (возможно, неавтономной) образуют симплектическое многообразие, а именно, фа-

[1] То есть $d^2(L|w) > 0$.

зовое пространство соответствующей гамильтоновой системы (например, T^*J^n для задачи (2)). Из теоремы получаем

Следствие 2. *Если ориентированные геодезические* (*непараметризованные*) *риманова многообразия образуют гладкое многообразие, то оно является симплектическим.*

Пример. Лучи (т. е. ориентированные прямые) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ образуют симплектическое многообразие — многообразие характеристик гиперповерхности $\langle p, p\rangle = 1$ в $T^*\mathbb{R}^n$. С точностью до знака симплектической структуры оно симплектоморфно кокасательному расслоению единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. На рис. 15 показано, как сопоставить лучу (ко)касательный вектор к сфере.

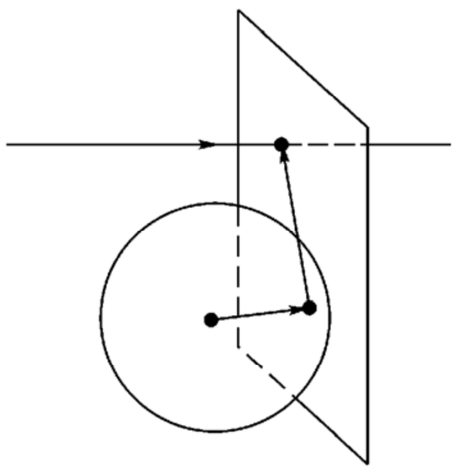


Рис. 15

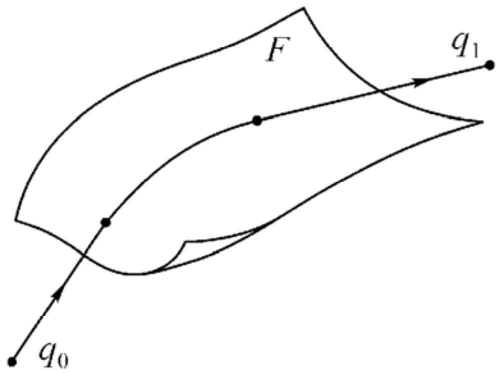


Рис. 16

1.6. Кратчайший обход препятствия. Рассмотрим гладкую поверхность в пространстве как границу препятствия. Кратчайший путь между точками q_0, q_1 в обход препятствия (рис. 16) состоит из отрезков прямых и отрезка геодезической на его поверхности. Длина экстремалей — многозначная функция точки q_1 с особенностями вдоль лучей, срывающихся с поверхности препятствия в асимптотическом направлении. Лучи, по которым выходящие из источника экстремали срываются с поверхности препятствия, образуют лагранжево многообразие с особенностями в симплектическом многообразии всех лучей пространства (ср. п. 1.5).

Симплектический анализ задачи об обходе препятствия приводит к понятию триады в симплектическом пространстве. Триада (L, l, H)

состоит из гладкого лагранжева многообразия L, гладкой гиперповерхности l в L (l — изотропное многообразие) и гладкой гиперповерхности H в объемлющем симплектическом пространстве, касающейся лагранжева многообразия в точках изотропного. Проекция изотропного многообразия вдоль характеристик гиперповерхности является лагранжевым подмногообразием в многообразии характеристик и имеет особенности в тех местах, где характеристики касаются l.

Возвращаясь к задаче об обходе препятствия в евклидовом (более общо — римановом) пространстве, свяжем с пучком геодезических на границе препятствия триаду в симплектическом пространстве $T\mathbb{R}^n = T^*\mathbb{R}^n$. Движение по прямым в $\mathbb{R}^n$ задается гамильтонианом $h = \langle p, p\rangle$; пусть $H = h^{-1}(1) \subset T\mathbb{R}^n$ — гиперповерхность его единичного уровня. Экстремали, выходящие из источника, на гиперповерхности F — границе препятствия — образуют пучок геодезических. Многообразие $\lambda \subset H$ касательных к геодезическим пучка единичных векторов лагранжево в $TF = T^*F$ (длина экстремали — его производящая функция). Пусть L состоит из всевозможных продолжений ковекторов $\xi \in \lambda$ на F до ковекторов η на $\mathbb{R}^n$, приложенных в той же точке. Пусть $l = H \cap L$. Нетрудно проверить (рис. 17), что H строго квадратично касается L вдоль l, т. е. (L, l, H) — триада.

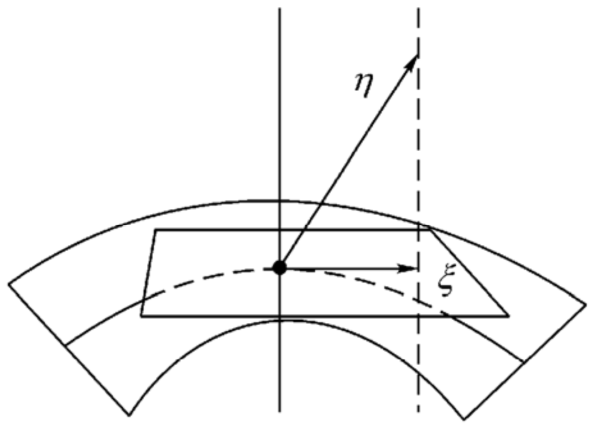


Рис. 17

Обозначим через $\tau_{n,m}$ росток в нуле следующей триады в симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами Дарбу

$$(p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m, \overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_{n-m}, \overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_{n-m})\colon L = \{p = \overline{p} = 0\},$$
$$l = L \cap \{q_m = 0\},\ H = \{q_m^2/2 + p_m q_{m-1} + \ldots + p_2 q_1 + p_1 = 0\}.$$

Полезно сравнить уравнение гиперповерхности H с квадратичным гамильтонианом функционала $\int (d^m x/dt^m)^2\, dt$ (пп. 2.3, 2.4, гл. 1 или п. 1.4, гл. 3). Экстремали функционала — многочлены $x(t)$. Поэтому в пространстве многочленов возникает естественная симплектическая структура. Лагранжево многообразие с особенностями триады $\tau_{m,m}$ диффеоморфно раскрытому ласточкину хвосту Σ_m — многообразию многочленов степени $2m-1$ с фиксированным старшим коэффициентом и нулевой суммой корней, имеющих корень кратности $\geqslant m$. Многообразие Σ_m лагранжево в естественной симплектической структуре на пространстве многочленов.

Теорема [4]. *Росток триады общего положения в точке квадратичного касания гиперповерхности с лагранжевым многообразием симплектоморфен одному из ростков $\tau_{n,m}$, $m \leqslant n$.*

Следствие. *Росток лагранжева многообразия лучей, срывающихся с пучка геодезических общего положения на границе препятствия общего положения, симплектоморфен декартову произведению гладкого многообразия на раскрытый ласточкин хвост.*

Пример. Касательная в точке простого перегиба кривой, ограничивающей препятствие на плоскости, является точкой возврата лагранжевой кривой, образованной касательными к границе препятствия. Такую же особенность имеет кривая Σ_2 на плоскости параметров семейства кубических многочленов t^3+qt+p, образованная многочленами с кратным корнем.

Пример триад показывает, что симплектическая версия вариационных задач может быть нетривиальной. Подробнее о задаче кратчайшего обхода препятствия см. п. 3.5, гл. 5, а также [3], [4], [29], [32], [59].

§ 2. Вполне интегрируемые системы

Интегрируемость гамильтоновой динамической системы обеспечивается достаточным запасом первых интегралов. Мы обсуждаем геометрические следствия и причины интегрируемости. Исследование фактически проинтегрированных систем см. в статье Б. А. Дубровина, И. М. Кричевера, С. П. Новикова.

2.1. Интегрируемость по Лиувиллю. Функция F на симплектическом многообразии является первым интегралом гамильтоновой системы с гамильтонианом H, если и только если скобка Пуассона H с F равна нулю (см. п. 3.1, гл. 2). Про первые интегралы, скобка Пуассона которых между собой равна нулю, говорят, что они находятся в инволюции.

Определение. Гамильтонова система на симплектическом многообразии M^{2n} называется *вполне интегрируемой*, если она имеет n первых интегралов в инволюции, функционально независимых почти всюду на M^{2n}.

Пример 1. Гамильтонова система с одной степенью свободы $(n=1)$ вполне интегрируема.

Пример 2. Линейная Гамильтонова система вполне интегрируема. В п. 3.3 гл. 2 мы показали, что каждый квадратичный гамильтониан в $\mathbb{R}^{2n}$ входит в n-мерную коммутативную подалгебру алгебры Ли квадратичных гамильтонианов. В действительности подалгебра может быть выбрана так, чтобы ее образующие были функционально независимы почти всюду в $\mathbb{R}^{2n}$.

Теорема Лиувилля. *Пусть на $2n$-мерном симплектическом многообразии M заданы n гладких функций в инволюции*

$$F_1, \ldots, F_n; \quad \{F_i, F_j\} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим множество уровня функций F_i

$$M_f = \{x \in M \mid F_i(x) = f_i, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Предположим, что на M_f n функций F_i независимы (т. е. $dF_1 \wedge \ldots \wedge \wedge dF_n \neq 0$ в каждой точке M_f). Тогда:

1) *M_f — гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока гамильтониана $H = H(F_1, \ldots, F_n)$ (скажем, $H = F_1$).*

2) *M_f имеет каноническую аффинную структуру, в которой фазовый поток выпрямляется, т. е. в аффинных координатах $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ на M_f $\dot{\varphi} = \mathrm{const}$.*

Доказательство.

В предположениях теоремы Лиувилля отображение

$$F = (F_1, \ldots, F_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$$

в окрестности многообразия M_f является лагранжевым расслоением. По теореме об аффинной структуре (п. 4.2, гл. 2) M_f локально отождествляется с областью в кокасательном пространстве базы $\mathbb{R}^n$ в точке f, причем поле на M_f, определяемое гамильтонианом F^*H, $H = H(f_1, \ldots, f_n)$ переходит при этом отождествлении в ковектор $d_f H$, т. е. постоянно. ■

Замечание 1. Первые интегралы $F_1, \ldots, F_n$ независимы на M_f для почти всех $f \in \mathbb{R}^n$ (не исключено, что M_f при этом пусто). Это следует из теоремы Сарда (A. Sard) (см. [6]).

Замечание 2. Пусть M_f — компактно. Тогда (в предположениях теоремы Лиувилля) каждая связная компонента M_f — n-мерный тор (см. п. 4.2, гл. 2). Поток гамильтониана H на таком торе либо периодический, либо условно-периодический. В последнем случае фазовые кривые — параллельные прямолинейные обмотки тора (рис. 18). Инвариантные торы часто встречаются в механических интегрируемых системах, поскольку для компактности M_f достаточно, чтобы были компактными многообразия уровня энергии $H = \mathrm{const}$. Это так, например, для натуральных систем с компактным конфигурационным пространством.

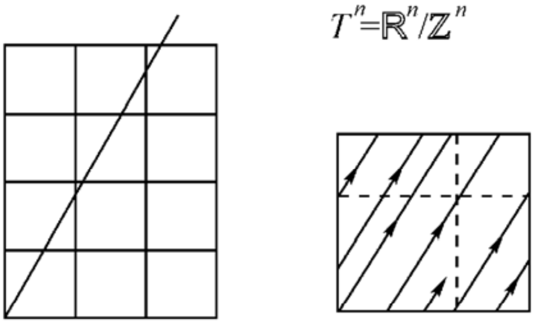


Рис. 18

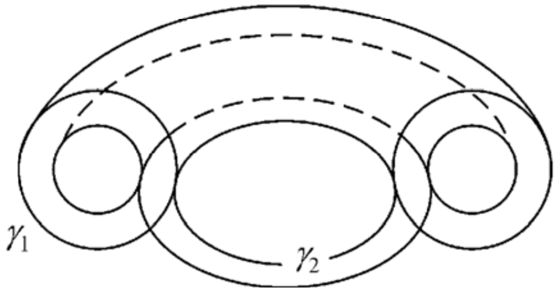


Рис. 19

2.2. Переменные «действие-угол». Пусть $M = \mathbb{R}^{2n}$ — стандартное симплектическое пространство, слой M_f при $f = 0$ компактен и удовлетворяет условиям теоремы Лиувилля. Тогда в окрестности M_0 слои M_f — n-мерные лагранжевы торы. Выберем базис $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ одномерных циклов на торе M_f, непрерывно зависящий от f (рис. 19).

Положим

$$I_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_k(f)} p\,dq, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Функции $I_k = I_k(F(p, q))$ называются переменными действия.

Теорема. *В окрестности тора M_0 можно ввести структуру прямого произведения $(\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n) \times \mathbb{R}^n$ с координатами, действия*

$(I_1, \dots, I_n)$ на сомножителе $\mathbb{R}^n$ и угловыми координатами $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ на торе $\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$, в которых симплектическая структура $\sum dp_k \wedge dq_k$ в $\mathbb{R}^{2n}$ имеет вид $\sum dI_k \wedge d\varphi_k$.

Доказательство.

В п. 4.2, гл. 2 мы построили целочисленную аффинную структуру в базе лагранжева расслоения со слоем тор: отождествление касательных пространств к аффинному тору M_f с кокасательным пространством базы $T^*_f\mathbb{R}^n$ вводит там целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n_f \subset T^*_f\mathbb{R}^n$, а базисные циклы $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ задают n дифференциальных 1-форм в $\mathbb{R}^n$ дифференциалов аффинных координат на базе. ■

В действительности, с точностью до множителя 2π и прибавления констант, переменные действия и являются этими аффинными координатами. Само лагранжево расслоение выбором лагранжева сечения локально отождествляется с $(\mathbb{R}^n)^*/(2\pi\mathbb{Z})^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (группа $\mathbb{Z}^n$ действует на $T^*\mathbb{R}^n$ сдвигами в каждом кокасательном пространстве). Координаты Дарбу на $T^*\mathbb{R}^n$ после факторизации превращаются в переменные действие-угол.

Пример 1. В случае одной степени свободы действие равно поделенной на 2π площади области, ограниченной замкнутой компонентой линии уровня гамильтониана.

Пример 2. Для линейного осциллятора $H = \sum(p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2)/2$ переменные действия имеют вид $I_k = \sum(p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2)/(2\omega_k)$ (отношение энергии собственного колебания к его частоте), а угловые координаты — фазы собственных составляющих колебания.

В переменных действие-угол система уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H(I_1, \dots, I_n)$ принимает вид $I_k = 0$, $\varphi_k = \dfrac{\partial H}{\partial I_k}$ и немедленно интегрируется:

$$I_k(t) = I_k(0), \qquad \varphi_k(t) = \varphi_k(0) + \left.\frac{\partial H}{\partial I_k}\right|_{I(0)} \cdot t.$$

При построении переменных действие--угол, помимо дифференциальных и алгебраических операций над функциями, применялось только обращение диффеоморфизмов и интегрирование известных функций — «квадратуры». В таком случае говорят, что исходную систему уравнений удалось проинтегрировать в квадратурах.

Следствие. *Вполне интегрируемая система интегрируется в квадратурах.*

Теорема Лиувилля охватывает практически все проинтегрированные на сегодняшний день задачи гамильтоновой механики. Но она ничего не говорит о том, как найти полный набор первых интегралов в инволюции. До недавнего времени, по существу, единственным глубоким средством интегрирования был метод Гамильтона – Якоби (см. п. 4.4, гл. 4). После открытия бесконечномерных интегрируемых гамильтоновых систем (начиная с уравнения Кортевега – де Фриза) было обнаружено много новых механизмов интегрирования. Все они связаны с дополнительными алгебро-геометрическими свойствами фактически проинтегрированных систем, никак не отраженными в теореме Лиувилля. Мы приведем ниже ряд иллюстрирующих примеров.

2.3. Эллиптические координаты и геодезические на эллипсоиде. Пусть $E\colon V \to V^*$ — линейный оператор, задающий евклидову структуру в пространстве V, $A\colon V \to V^*$ — другой симметрический оператор, $A^* = A$. Евклидовым пучком квадрик называется однопараметрическое семейство гиперповерхностей второй степени $\langle A_\lambda x, x\rangle = 2$, где $A_\lambda = A - \lambda E$. Конфокальным семейством квадрик в евклидовом пространстве называется семейство квадрик, двойственных квадрикам одного евклидова пучка, т.е. семейство $\langle A_\lambda^{-1}\xi, \xi\rangle = 2$, $\xi \in V^*$.

Пример. Плоские кривые, конфокальные фиксированному эллипсу, это все эллипсы и гиперболы с теми же фокусами (рис. 20).

Эллиптическими координатами точки называются значения; параметра λ, при которых квадрики фиксированного конфокального семейства проходят через эту точку.

Зафиксируем в евклидовом пространстве эллипсоид, все оси которого имеют неравные длины.

Теорема Якоби. *Через каждую точку n-мерного евклидова пространства проходят n квадрик, конфокальных выбранному эллипсоиду. Гладкие конфокальные квадрики пересекаются под прямыми углами.*

Доказательство.

В терминах двойственного пространства теорема означает, что гиперплоскость $\langle l, x\rangle = 1$ касается ровно n квадрик евклидова пучка, причем радиус-векторы точек касания попарно ортогональны. Указанное свойство вытекает из того, что эти векторы определяют главные оси квадрики $\langle Ax, x\rangle = 2\langle l, x\rangle^2$. ■

Теорема Шаля (M. Chasles). *Общая прямая в n-мерном евклидовом пространстве касается $(n-1)$-й различной квадрики семейства конфокальных квадрик, причем плоскости, касающиеся каждая своей квадрики в точке ее касания с прямой, попарно ортогональны.*

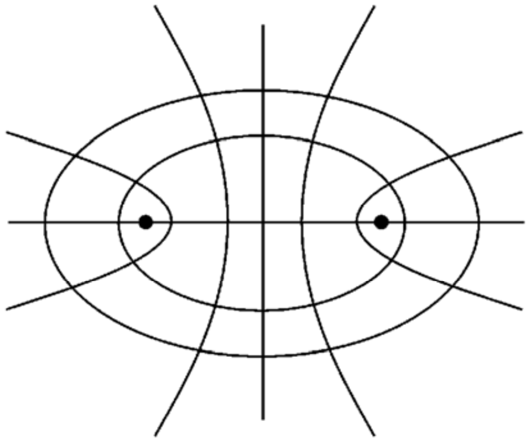


Рис. 20

Доказательство.

Видимые контуры квадрик конфокального семейства при проектировании вдоль прямой образуют семейство квадрик, двойственное семейству квадрик в проходящей через нуль гиперплоскости двойственного пространства. Последнее семейство есть просто сечение гиперплоскостью исходного евклидова пучка и потому образует евклидов пучок в гиперплоскости. Таким образом, видимые контуры образуют конфокальное семейство квадрик в $(n-1)$-мерном пространстве прямых, параллельных данной. Теорема Шаля вытекает теперь из теоремы Якоби, примененной к этому семейству. ■

Теорема Якоби–Шаля. *Касательные прямые к геодезической линии квадрики в n-мерном пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются, кроме этой квадрики, еще $(n-2)$-х конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек геодезической.*

Доказательство.

Многообразие ориентированных прямых в евклидовом пространстве V имеет естественную симплектическую структуру и, с точностью до знака этой структуры, симплектоморфно кокасательному расслоению единичной сферы S (см. п. 1.5). Пусть F — гладкая гиперповерхность в V. ■

Лемма А. *Отображение ρ, сопоставляющее точке геодезической линии на F ее касательную прямую в этой точке, переводит геодезические F в характеристики гиперповерхности $P \subset T^*S$ касательных к F прямых в пространстве всех прямых.*

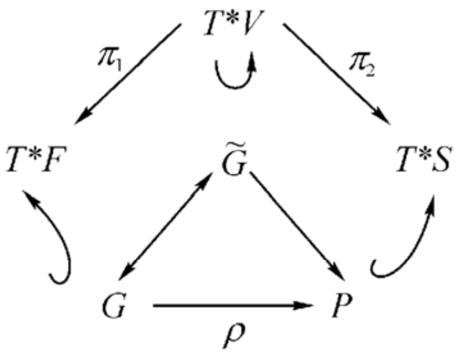


Рис. 21

Действительно, геодезические на F — это характеристики на гиперповерхности $G \subset T^*F$ всех единичных (ко)векторов на F. Отождествляя V с V^* при помощи евклидовой структуры, рассмотрим G как подмногообразие $\widetilde{G}$ коразмерности 3 в T^*V всех единичных векторов в V, касающихся F. На коммутативной диаграмме рис. 21 π_2 есть проекция вдоль характеристик гиперповерхности $\{(p, q) \mid \langle p, p\rangle = 1\}$ всех единичных векторов в V, а π_1 — вдоль характеристик гиперповерхности $\{(p, q) \mid q \in F\}$ всех векторов, приложенных в точках F. Отображения $G \xleftarrow{\pi_1} \widetilde{G} \xrightarrow{\pi_2} P$ переводят характеристики в характеристики, так как характеристики на $\widetilde{G}$, G и P определяются только симплектическими структурами объемлющих пространств. Поэтому отображение ρ переводит геодезические на F в характеристики P.

Пусть теперь в евклидовом пространстве V задана гладкая функция и пусть некоторая прямая квадратично касается поверхности уровня в некоторой своей точке. Тогда близкие прямые касаются близких поверхностей уровня функции. Определим индуцированную функцию в пространстве прямых, равную значению функции в точке касания прямой с ее поверхностью уровня.

Лемма Б. *Если две функции в евклидовом пространстве таковы, что касательные плоскости к их поверхностям уровня в точках касания с некоторой фиксированной прямой ортогональны, то скобка Пуассона индуцированных функций равна нулю в точке, являющейся рассматриваемой прямой* (рис. 22).

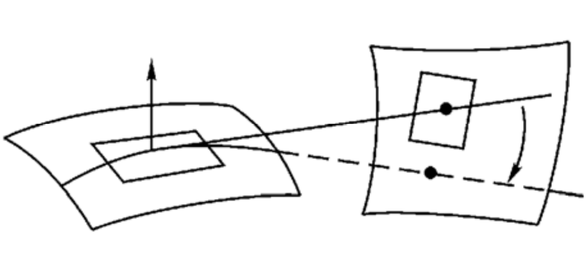


Рис. 22

Действительно, при движении по касательной к нашей прямой геодезической первой поверхности уровня, касательная прямая поворачивается в направлении нормали к этой поверхности и, тем самым, с точностью до малых второго порядка, продолжает касаться той же поверхности уровня второй функции. Поэтому производная второй индуцированной функции вдоль гамильтонова потока первой равна нулю в рассматриваемой точке.

Рассмотрим теперь прямую общего положения в V. По теореме Шаля она касается $(n-1)$-й квадрики конфокального семейства. Построим в окрестности точек касания $n-1$ функцию, поверхности уровня которых — квадрики нашего семейства. По лемме Б индуцированные функции на пространстве прямых находятся в инволюции. Характеристика на поверхности уровня одной из индуцированных функций состоит (по лемме А) из касательных прямых к одной геодезической соответствующей квадрики. Поскольку все индуцированные функции на этой характеристике постоянны, то теорема доказана.

Следствие. *Геодезический поток на квадрике в евклидовом пространстве — вполне интегрируемая гамильтонова система.*

Замечание 1. Строго говоря, мы доказали теорему Якоби–Шаля для квадрик и прямых общего положения, но по непрерывности результат легко распространяется на вырожденные случаи.

Замечание 2. Бескоординатность приведенных рассуждений позволяет распространить их на бесконечномерную ситуацию. Мы получаем большой запас вполне интегрируемых систем — геодезических потоков на бесконечномерных эллипсоидах, определяемых самосопряженными операторами в гильбертовых пространствах. Было бы интересно выяснить, что представляют собой эти системы для конкретных самосопряженных операторов, встречающихся в математической физике.

2.4. Пуассоновы пары. Пусть на многообразии M заданы две пуассоновы структуры V и W (см. п. 3.2, гл. 2). Говорят, что они образуют *пуассонову пару,* если все их линейные комбинации $\lambda V + \mu W$ — также пуассоновы структуры. Используя скобку Схоутена $[,]$ (п. 3.2, гл. 2), находим, что кососимметрические бивекторные поля V, W на M образуют пуассонову пару тогда и только тогда, когда $[V, V] = [W, W] = [V, W] = 0$. В следующей теореме мы, простоты ради, предполагаем, что M односвязно и пуассоновы структуры V и W всюду невырождены. Тем самым, на односвязном многообразии M определены две симплектические структуры V^{-1}, W^{-1}, скобки Пуассона $V(f, g)$ и $W(f, g)$ которых согласованы тождеством $V(W(f, g), h) + W(V(f, g), h) + (\text{цикл}) = 0$ для любых гладких функций f, g, h на M.

Теорема [1]. *Пусть на многообразии M задано векторное поле v, поток которого сохраняет обе пуассоновы структуры пуассоновой па-*

ры V, W. Тогда существует такая последовательность гладких функций $\{f_k\}$ на M, что

а) f^0 — гамильтониан поля v относительно V;

б) поле V-гамильтониана f_k совпадает с полем W-гамильтониана f_{k+1};

в) функции $\{f_k\}$ находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона.

Доказательство.

Поле v по условию гамильтоново для обеих симплектических структур. Пусть f_0, f_1 — его гамильтонианы относительно V и W соответственно. Формальная выкладка на применение тождества $[V, W] = 0$ показывает, что поток V-гамильтонова поля с гамильтонианом f_1 сохраняет скобку Пуассона W. Пусть f_2 — его W-гамильтониан. Продолжая по индукции, получаем последовательность функций $\{f_k\}$, удовлетворяющую а) и б). Пусть $r > s$. Тогда

$$V(f_r, f_s) = W(f_r, f_{s+1}) = V(f_{r-1}, f_{s+1})$$

и т. д. В конце получим либо $V(f_t, f_t)$, либо $W(f_t, f_t)$, что доказывает в). ■

Пример. Цепочка Тоды (M. Toda). Рассмотрим натуральную систему в $\mathbb{R}^N$ с гамильтонианом $H = \sum p_k^2/2 + \sum e^{q_k - q_{k+1}}$, $q_{N+1} = q_1$. Она описывает динамику N одинаковых материальных точек с одной степенью свободы каждая, соединенных по кругу, наподобие молекулы бензола, упругими связями с потенциалом $e^u - u$, где $u = q_k - q_{k+1}$ — разность координат связанных соседей. Переходя в систему переменных $u_k = q_k - q_{k+1}$, имеем следующие уравнения эволюции цепочки Тоды: $\dot{u}_k = p_k - p_{k+1}, \dot{p}_k = e^{u_{k-1}} - e^{u_k}$. Обозначая $\partial_k = \partial/\partial u_k$, $\nabla_k = \partial/\partial p_k$, положим $W = \sum(\partial_k \wedge \partial_{k+1} + p_k \nabla_k \wedge (\partial_k - \partial_{k-1}) + e^{u_k} \nabla_{k+1} \wedge \nabla_k)$. Непосредственно проверяется, что W — пуассонова структура в $\mathbb{R}^{2N}$. Положим $V = \sum \nabla_k \wedge (\partial_k - \partial_{k-1})$. W, V — пуассонова пара. Действительно, $W + \lambda V$ получается из W сдвигом $p_k \mapsto p_k + \lambda$. В качестве потока, сохраняющего обе структуры пуассоновой пары, рассмотрим поток поля $v \equiv 0$. Полный импульс $f_0 = \sum p_k$ — функция Казимира для V, поэтому f_0 — V-гамильтониан поля v. Функция f_0, рассматриваемая как W-гамильтониан, порождает систему уравнений цепочки Тоды. В соответствии с теоремой эта система V-гамильтонова с гамильтонианом $f_1 = \sum(p_k^2/2 + e^{u_k})$. Система с W-гамильтонианом f_1 V-гамильтонова с гамильтонианом $f_2 = \sum[p_k^3/3 + p_k(e^{u_{k-1}} + e^{u_k})]$ и т. д. Возникающая серия f_0, f_1, f_2, … первых интегралов в инволюции обеспечивает полную интегрируемость цепочки Тоды (см. статью Б. А. Дубровина, И. М. Кричевера, С. П. Новикова).

Другой способ построения функций в инволюции по пуассоновой паре состоит в следующем. Пусть f_V, g_W — функции Казимира пуассоновых структур V, W соответственно (здесь предполагается, что пуассоновы структуры V, W, образующие пуассонову пару, вырождены — в противном случае f_V и g_W необходимо константы).

Лемма. *Функции f_V и g_W находятся в инволюции относительно пуассоновой структуры $\lambda V + \mu W$.*

Мы применим эту лемму в следующем пункте.

2.5. Функции в инволюции на орбитах коалгебр Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. На сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ имеется линейная пуассонова структура (см. п. 3.3, гл. 2): скобка Пуассона линейных функций x, y на $\mathfrak{g}^*$ равна их коммутатору $[x, y]$ в $\mathfrak{g}$. Симплектические слои этой пуассоновой структуры — орбиты коприсоединенного действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$, функции Казимира — инварианты коприсоединенного действия. Следующий способ построения функций в инволюции на орбитах называется *методом сдвига аргумента.*

Теорема. *Пусть $f, g\colon \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ — инварианты коприсоединенного действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$. Тогда функции $f(\xi + \lambda\xi_0)$, $g(\xi + \mu\xi_0)$ точки $\xi \in \mathfrak{g}^*$ находятся в инволюции при любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ на каждой орбите коприсоединенного действия.*

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть ω — внешняя 2-форма на $\mathfrak{g}$. Определяемая формой ω постоянная пуассонова структура на $\mathfrak{g}^*$ образует с линейной пуассоновой структурой на $\mathfrak{g}^*$ пуассонову пару тогда и только тогда, когда ω — 2-коцикл на $\mathfrak{g}$, т. е. $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$*

$$\omega([x, y], z) + \omega([y, z], x) + \omega([z, x], y) = 0.$$

Если 2-коцикл ω является кограницей, т. е. $\omega(x, y) = \xi_0([x, y])$, где $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ — линейная функция на $\mathfrak{g}$, то пуассонова структура $\{\,,\,\}_\lambda = [\,,\,] + \lambda\omega(\,,\,)$ получается из линейной пуассоновой структуры $[\,,]$

сдвигом в $\mathfrak{g}$ на $\lambda\xi_0$. Функции $f(\xi+\lambda\xi_0)$, $g(\xi+\mu\xi_0)$ являются в этом случае функциями Казимира для пуассоновых структур $\{\,,\,\}_\lambda$, $\{\,,\,\}_\mu$ соответственно. Применяя лемму предыдущего пункта, получим утверждение теоремы при $\lambda \neq \mu$ и по непрерывности — для любых λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

2.6. Представление Лакса (P. Lax). Говорят, что задано *представление Лакса* системы дифференциальных уравнений $\mathring{x} = v(x)$ на многообразии M (v — векторное поле на M), если

1) заданы два отображения L, $A\colon M \to \mathfrak{g}$ многообразия M в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ (например, в алгебру матриц), причем L — вложение;

2) имеет место *уравнение Лакса* $L = [L, A]$, где L — производная L вдоль векторного поля v, $[\,,]$ — коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Уравнение Лакса $L = [L, A]$ означает, что L, изменяясь во времени, остается в той же орбите присоединенного действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поэтому инварианты орбиты (например, коэффициенты характеристического многочлена или собственные числа L если $\mathfrak{g}$ — алгебра матриц) — первые интегралы системы $\dot{x} = v(x)$.

Пример 1. Пусть $H(p, q)$ — полиномиальный гамильтониан в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с особой точкой 0. Разложим H в сумму $\sum H_k$ однородных слагаемых степени k ($k \neq 1$) и положим $G = \sum \dfrac{H_k}{(k-1)}$. Рассмотрим следующие матрицы размера $(2n+1)\times(2n+1)$ (E — единичная матрица размера n):

$$\Lambda = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & E & \\ -E & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 \end{array}\right], \quad L = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\ \hline p\ q & 0 \end{array}\right] \Lambda = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\ \hline -q\ p & 0 \end{array}\right],$$

$$A = \Lambda \left[\begin{array}{c|c} d^2G & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} G_{qp} & G_{qq} & \\ -G_{pp} & -G_{pq} & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \end{array}\right].$$

Тогда $L = [L, A]$ — представление Лакса для системы уравнений Гамильтона с гамильтонианом H (мы используем формулы Эйлера $G_{pp}p + G_{pq}q = H_p$, $G_{qp}p + G_{qq}q = H_q$).

В этом примере $L^3 = 0$, и никаких первых интегралов не возникает. Обычно интегрируемые системы связаны с нетривиальными однопараметрическими семействами представлений Лакса.

Пример 2. Пусть в примере 1 H — квадратичный гамильтониан. Тогда A — постоянная матрица. Мы можем положить $L_\lambda = L + \lambda A$, где λ — параметр, и получим представление Лакса $L_\lambda = [L_\lambda, A]$ линейной гамильтоновой системы. Пусть теперь S — матрица квадратичного гамильтониана $\langle Sz, z\rangle/2$ в координатах Дарбу $z = (p, q)$,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \ - \ \text{матрица симплектической формы.}$$

Тогда характеристический многочлен матрицы L_λ имеет вид:

$$\det(\mu E_{2n+1} - L_\lambda) = \det(\lambda S - \mu\Omega)[\mu + \langle(\lambda S - \mu\Omega)^{-1}\Omega z, \Omega z\rangle].$$

Коэффициенты этого многочлена при μ^{2k}, $k = 0, \ldots, n-1$ — квадратичные по z первые интегралы нашей линейной гамильтоновой системы. Они находятся в инволюции. Действительно, полагая $w_\mu = \Omega^*(\lambda S - \mu\Omega)^{-1}\Omega$ и используя тождество $w_\alpha - w_\beta = (\alpha - \beta)w_\beta\Omega w_\alpha$, для квадратичных форм $I_\alpha = \langle w_\alpha z, z\rangle$ и $I_\beta = \langle w_\beta z, z\rangle$ получим

$$\begin{aligned}\{I_\alpha, I_\beta\} &= \langle\Omega(w_\alpha + w_{-\alpha})z, (w_\beta + w_{-\beta})z\rangle = \\ &= (\alpha - \beta)^{-1}\langle[(w_\alpha - w_{-\alpha}) - (w_\beta - w_{-\beta})]z, z\rangle + \\ &+ (\alpha + \beta)^{-1}\langle[(w_\alpha - w_{-\alpha}) + (w_\beta - w_{-\beta})]z, z\rangle = 0,\end{aligned}$$

так как $w_\mu - w_{-\mu}$ — кососимметрические матрицы.

Практически все известные на сегодняшний день вполне интегрируемые системы могут быть проинтегрированы с помощью подходящего представления Лакса, в котором L и A — матрицы с полиномиальными по параметру λ коэффициентами.

Пример 3. Свободное вращение многомерного твердого тела. Рассматриваемая система эквивалентна геодезическому потоку специальной левоинвариантной римановой метрики на группе $\mathbf{SO}_n$. Метрика задается квадратичной формой инерции «во внутренних координатах тела» (см. п. 1.1), т. е. на алгебре Ли $\mathbf{so}_n$. Как мы увидим в § 3, исследование такой системы сводится к изучению гамильтоновых потоков на орбитах коприсоединенного действия в $\mathbf{so}_n^*$ с квадратичной функцией Гамильтона. Квадратичная форма инерции на алгебре $\mathbf{so}_n$ кососимметрических $n \times n$-матриц имеет вид $-\operatorname{tr}(\omega D\omega)$, где $\omega \in \mathbf{so}_n$,

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n), \quad d_k = \frac{1}{2}\int \rho(x)x_k^2\,dx,$$

$\rho(x)$ — плотность тела в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Обозначая через M оператор формы инерции, $M\colon \mathbf{so}_n \to \mathbf{so}_n^*$, получаем для момента импульса $M(\omega)$ *уравнение Эйлера* $\dot{M} = ad_\omega^* M$. В матричном виде

$$M(\omega) = D\omega + \omega D,$$

и уравнение Эйлера имеет форму Лакса $\dot{M} = [M, \omega]$. Полагая

$$M_\lambda = M + \lambda D^2, \qquad \omega_\lambda = \omega + \lambda D,$$

получаем представление Лакса с параметром для уравнения Эйлера: $\dot{M}_\lambda = [M_\lambda, \omega_\lambda]$. Это представление обеспечивает полную интегрируемость свободного вращения n-мерного твердого тела вокруг неподвижной точки. Инволютивность первых интегралов

$$H_{\lambda,\mu} = \det(M + \lambda D^2 + \mu E)$$

можно доказать, опираясь на теорему о сдвиге аргумента из предыдущего пункта (см. [24]).

§ 3. Гамильтоновы системы с симметриями

Описанная в п. 1.5 процедура понижения порядка гамильтоновой системы, инвариантной относительно гамильтонова потока, обобщается ниже на случай произвольной группы Ли симметрий.

3.1. Пуассоновские действия и отображения моментов. Пусть группа Ли G действует на связном симплектическом многообразии (M, ω) симплектоморфизмами. Тогда каждому элементу алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G отвечает локально гамильтоново векторное поле на M. Будем предполагать в дальнейшем, что все эти векторные поля имеют однозначные гамильтонианы. Выбирая такие гамильтонианы для базиса в $\mathfrak{g}$, получим линейное отображение $\mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, сопоставляющее элементу $a \in \mathfrak{g}$ его гамильтониан H_a. Скобка Пуассона $\{H_a, H_b\}$ может отличаться от $H_{[a,b]}$ на константу: $\{H_a, H_b\} = H_{[a,b]} + C(a, b)$.

Определение. *Действие связной группы Ли G* симплектоморфизмами на связном симплектическом многообразии называется *пуассоновским,* если базисные гамильтонианы выбраны так, что $C(a, b) = 0$ для всех $a, b \in \mathfrak{g}$.

Замечание. В общем случае функция $C(a, b)$ билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству

$$C([a, b], c) + C([b, c], a) + C([c, a], b) = 0,$$

то есть является 2-коциклом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Другой выбор констант в гамильтонианах H_α приводит к замене коцикла C на когомологичный

$$C'(a, b) = C(a, b) + p([a, b]),$$

где p — линейная функция на $\mathfrak{g}$. Таким образом, симплектическое действие определяет класс когомологий в $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ и является пуассоновским, если и только если этот класс нулевой. В последнем случае базис гамильтонианов, для которого $C(a, b) \equiv 0$, определен однозначно с точностью до прибавления 1-коцикла $p\colon \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \to \mathbb{R}$ и задает гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли функций Гамильтона на M.

Пуассоновское действие определяет *отображение моментов* $P\colon M \to \mathfrak{g}^*$, компоненты которого — базисные гамильтонианы: точке $x \in M$ отвечает функционал $P(x)|_{a\in\mathfrak{g}} = H_a(x)$.

Пуассоновское действие группы $\mathfrak{g}$ на M при отображении моментов переходит в коприсоединенное действие группы $\mathfrak{g}$: $P(gx) = \mathrm{Ad}_g^* P(x)$. На этом соображении основана классификация однородных симплектических многообразии.

Пусть связная группа Ли G действует на связном многообразии V, $M = T^*V$ — его кокасательное расслоение.

Теорема. *Естественное действие группы G на M — пуассоновское (при указанном ниже выборе гамильтонианов).*

Действительно, пусть v_a — векторное поле на M однопараметрической подгруппы элемента $a \in G$. Форма действия α на M G-инвариантна, поэтому $L_{v_a}\alpha = di_{v_a}\alpha + i_{v_a}\,d\alpha = 0$. Это равенство означает, что $H_a = i_{v_a}\alpha$ — гамильтониан поля v_a. Так как функции H_a линейны по импульсам, то $\{H_a, H_b\}$ и $H_{[a,b]}$ — тоже линейны и, следовательно, равны.

Следствие. *Значение гамильтониана H_a на ковекторе $p \in T_x^*V$ равно значению ковектора p на векторе скорости однопараметрической подгруппы элемента $a \in \mathfrak{g}$ в точке x.*

Отображение моментов в этом случае может быть описано следующим образом. Рассмотрим отображение $G \to M$, определенное действием на фиксированную точку $x \in M$. Прообраз 1-формы α на M при этом отображении — 1-форма на G. Ее значение в единице группы и есть момент $P(x)$ точки x.

Пример 1. Группа $\mathbf{SO}_3$ вращений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ порождена однопараметрическими подгруппами вращений с единичной скоростью вокруг координатных осей q_1, q_2, q_3. Соответствующие гамильтонианы — компоненты вектора момента импульса: $M_1 = q_2p_3 - q_3p_2$ и т. д.

Пример 2. Действие группы левыми сдвигами в своем кокасательном расслоении — пуассоновское. Соответствующее отображение моментов $P\colon T^*G \to \mathfrak{g}^*$ совпадает с правым сдвигом ковекторов в единицу группы.

3.2. Приведенное фазовое пространство и приведенные гамильтонианы. Предположим, что гамильтониан H на симплектическом многообразии M инвариантен относительно пуассоновского действия группы G на M. Компоненты отображения моментов являются первыми интегралами такой гамильтоновой системы.

Обозначим через M_p слой над точкой $p \in \mathfrak{g}^*$ отображения моментов $P\colon M \to \mathfrak{g}^*$. Пусть G_p — стабилизатор точки p в коприсоединенном представлении группы G. Группа G_p действует на M_p. Факторпространство $F_p = M_p/G_p$ называется *приведенным фазовым пространством.*

Для того, чтобы F_p было гладким многообразием, нужны некоторые предположения. Например, достаточно предположить, что

а) p — регулярное значение отображения моментов, так что M_p гладкое многообразие;

б) G_p — компактная группа Ли;

в) элементы группы G_p действуют на M_p без неподвижных точек.

Условие б) можно ослабить: достаточно предположить, что действие G_p на M_p собственное, т. е. при отображении

$$G_p \times M_p \to M_p \times M_p\colon (g, x) \mapsto (gx, x)$$

прообразы компактов компактны. Например, действие группы на себе сдвигами всегда собственное.

Предположим, что сформулированные условия выполнены.

Теорема [1]. *Приведенное фазовое пространство имеет естественную симплектическую структуру.*

Кососкалярное произведение векторов на F_p определяется, как кососкалярное произведение их прообразов при проекции $M_p \to F_p$, приложенных в одной точке слоя проекции. Можно доказать, что касательное пространство $T_x M_p$ к слою отображения моментов и касательное пространство $T_x(Gx)$ к орбите группы G являются косоортогональными дополнениями друг друга в касательном пространстве $T_x M$ и пересекаются по изотропному касательному пространству $T_x(G_p x)$ к орбите стабилизатора G_p. Отсюда следует корректность определения кососкалярного произведения и его невырожденность.

Инвариантный гамильтониан H определяет *приведенную функцию Гамильтона* H_p на M_p. Соответствующее функции H гамильтоново векторное поле на M касается слоя M_p отображения моментов и инвариантно относительно действия группы G_p на M_p. Поэтому оно определяет *приведенное векторное поле* X_p на F_p.

Теорема [1]. *Приведенное поле на приведенном фазовом пространстве гамильтоново с приведенной функцией Гамильтона.*

Пример. В случае действия группы Ли левыми сдвигами на своем кокасательном расслоении слой M_p отображения моментов — правоинвариантное сечение кокасательного расслоения, равное p в единице группы. Стационарная подгруппа G_p совпадает со стабилизатором точки p в коприсоединенном представлении. Приведенное фазовое пространство F_p симплектоморфно орбите точки p.

3.3. Скрытые симметрии. О скрытых симметриях говорят, когда гамильтонова система обладает нетривиальной *алгеброй Ли первых интегралов*, не связанной априори с каким-либо действием конечномерной группы симметрий. Обобщением отображения моментов в такой ситуации является понятие *реализации пуассоновой структуры* [75] — такой субмерсии $M \to N$ симплектического многообразия на пуассоново, при которой скобка Пуассона функций на N переходит в скобку Пуассона их прообразов на M. Очевидна следующая

Лемма. *Субмерсия $M \to N$ тогда и только тогда является реализацией, когда прообразы симплектических слоев коизотропны.*

Пусть гамильтониан $H\colon M \to \mathbb{R}$ коммутирует с алгеброй Ли $\mathscr{A}$ функций, поднятых с N при реализации. Все такие гамильтонианы образуют алгебру Ли $\mathscr{A}'$, связанную с реализацией $M \to N'$ другой пуассоновой структуры. Эта *реализация* называется *дуальной* к исходной и строится следующим образом. Рассмотрим распределение на M косоортогональных дополнений к слоям субмерсии $M \to N$. Оно порождается полями гамильтонианов из алгебры Ли $\mathscr{A}$. Поэтому это распределение интегрируемо и касается коизотропных прообразов симплектических слоев. Проекция $M \to N'$ вдоль его интегральных многообразии (определенная по меньшей мере локально) является (по лемме) реализацией возникающей на N' пуассоновой структуры. Симплектические слои последней — приведенные фазовые пространства, на которых гамильтониан $H \in \mathscr{A}'$, рассматриваемый как функция на N', определяет приведенное движение.

Важный пример дуальных реализации доставляют отображения моментов действий группы Ли левыми и правыми сдвигами на своем кокасательном расслоении.

В общем случае имеется тесная связь между пуассоновыми многообразиями N и N' дуальных реализации. Например, них общие функции Казимира — рассматриваемые как функции на M, они образуют подалгебру $\mathscr{A} \cap \mathscr{A}'$. Имеется соответствие между симплектическими слоями в N и N', взаимно однозначное, если прообразы этих слоев в M связаны: соответствуют друг другу слои с пересекающимися прообразами.

Теорема [75]. *Ростки трансверсальных пуассоновых структур к соответствующим симплектическим слоям дуальных реализации антиизоморфны* (*т. е. изоморфны с точностью до знака скобки Пуассона*).

Определим эквивалентность реализации $M_1 \to N$, $M_2 \to N$ как коммутирующий с ними симплектоморфизм $M_1 \to M_2$ и стабилизацию реализации $M \to N$ как ее композицию с проекцией на сомножитель $M \times \mathbb{R}^{2k} \to M$ произведения симплектических многообразий.

Теорема [75]. *Росток* $(\mathbb{R}^n, 0)$ *пуассоновой структуры в точке коранга* r *обладает реализацией* $P\colon (\mathbb{R}^{n+r}, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$. *Любая его реализация эквивалентна стабилизации* P.

Приведенная в [75] конструкция реализации P является нелинейным обобщением отображения моментов $T^*G \to \mathfrak{g}$ группы Ли G.

3.4. Пуассоновы группы. Скобка Пуассона двух функций на симплектическом многообразии, инвариантных при симплектическом действии группы Ли — снова инвариантная функция. Обращение этого утверждения неверно: из замкнутости алгебры инвариантов относительно скобки Пуассона не вытекает симплектичность действия. Это обстоятельство привело В. Г. Дринфельда к обобщению процедуры редукции гамильтоновых систем на более широкий класс действий.

Рассмотрим категорию, объекты которой — пуассоновы многообразия, а морфизмы — пуассоновы отображения, то есть гладкие отображения, переводящие скобку Пуассона функций в скобку Пуассона их прообразов. Произведение $M \times N$ пуассоновых многообразии наделяется пуассоновой структурой, для которой проекции на сомножители — пуассоновы отображения, а прообразы функций с разных сомножителей находятся в инволюции. Пуассоновой группой называется пуассоново многообразие, наделенное структурой группы Ли, для которой умножение $G \times G \to G$ — пуассоново отображение, а обращение $G \to G$ — антиавтоморфизм (меняет знак скобки Пуассона). Пример — аддитивная группа коалгебры Ли.

В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ пуассоновой группы G определена линейная пуассонова структура — линеаризация пуассоновой структуры на G в единице. Поэтому в $\mathfrak{g}^*$ определена структура алгебры Ли (возникающая здесь двойная структура — это структура биалгебры Ли в смысле [13]). В приведенном выше примере она совпадает с исходной структурой алгебры Ли.

Действие пуассоновой группы G на пуассоновом многообразии M называется пуассоновым, если $G \times M \to M$ — пуассоново отображение. В случае действия группы G с тривиальной пуассоновой структурой на симплектическом многообразии M это условие равносильно симплектичности действия (но не его пуассоновости в старом смысле!)

Нетрудно проверить, что инварианты пуассонового действия пуассоновой группы на пуассоновом многообразии образуют подалгебру Ли в алгебре Ли функций на нем. То же самое справедливо для инвариантов связной подгруппы $H \subset G$, если ортогональное дополнение $\mathfrak{h}^{\perp} \subset \mathfrak{g}^*$ ее алгебры Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}^*$.

Для такой подгруппы на многообразии M/H (если оно существует) имеется единственная пуассонова структура, при которой проекция $M \to M/H$ — пуассоново отображение. На симплектических слоях в M/H H-инвариантный гамильтониан определяет приведенное движение. Отметим, что в описанной конструкции условие, наложенное на H, не означает, что H — пуассонова подгруппа — последнее справедливо, если $\mathfrak{h}^{\perp}$ — идеал в $\mathfrak{g}^*$.

В качестве примера рассмотрим действие связной подгруппы H аддитивной группы коалгебры Ли G сдвигами на G. Если $H^{\perp} \subset G^*$ — подалгебра Ли, то линейная пуассонова структура в ее сопряженном пространстве и есть искомая пуассонова структура в пространстве орбит $G/H = (H^{\perp})^*$.

Пуассоновы группы заняли важное место в теории вполне интегрируемых систем. Так, разобранный выше пример тесно связан с методом сдвига аргумента (п. 2.5). Это направление быстро развивается. Подробности можно найти в работах М. А. Семенова–Тян–Шанского, например, в [23].

3.5. Геодезические левоинвариантных метрик и уравнение Эйлера. Пусть на связной группе Ли G задана левоинвариантная риманова метрика. Она определяется своим значением в единице группы, т. е. положительно определенной квадратичной формой Q на пространстве $\mathfrak{g}^*$. Левоинвариантный геодезический поток на группе определяет приведенный гамильтонов поток на каждой орбите коприсоединенного представления — приведенном фазовом пространстве. Приведенный гамильтониан этого потока совпадает с ограничением на орбиту квадратичной формы Q. Пусть $\Omega\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ — оператор квадратичной формы Q. Тогда приведенное движение точки $P \in \mathfrak{g}^*$ описывается *уравнением Эйлера* $P = \mathrm{ad}^*_{\Omega(P)} P$.

В частном случае $G = \mathbf{SO}_3$ получаем классическое уравнение Эйлера, описывающее свободное вращение твердого тела во внутренних координатах тела. В векторных обозначениях оно имеет вид $P = P \times \Omega$, где Ω — вектор угловой скорости, P — вектор момента импульса, связанный с вектором Ω линейным преобразованием — оператором инерции тела. Вид уравнения Эйлера имеют уравнения гидродинамики идеальной жидкости [1] и система уравнений Максвелла–Власова (J. C. Maxwell, [75]), описывающая динамику плазмы. В этих случаях группа G бесконечномерна.

Рассмотрим подробнее течение идеальной (т. е. однородной, несжимаемой, невязкой) жидкости в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Пусть G — группа сохраняющих объемы диффеоморфизмов области D. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из гладких бездивергентных векторных полей в D, касающихся границы области D. Кинетическая энергия $\int \frac{v^2}{2}\, dx$ потока с полем скоростей v — правоинвариантная риманова метрика на группе G. Течение идеальной жидкости — геодезическая этой метрики. Уравнение Эйлера может быть записано в виде $\partial \operatorname{rot} v/\partial t = [v, \operatorname{rot} v]$, где $[\,,]$ — коммутатор векторных полей. Заметим, что «оператор инерции» $v \mapsto \operatorname{rot} v$ взаимно однозначно отображает пространство $\mathfrak{g}$ на пространство гладких бездивергентных полей в D при некоторых ограничениях на область D (достаточно, чтобы D была стягиваемой ограниченной областью с гладкой границей).

3.6. Относительные равновесия. Фазовые кривые системы с G-инвариантной функцией Гамильтона, проектирующиеся в положения равновесия приведенной функции Гамильтона на приведенном фазовом пространстве, называются *относительными равновесиями.*

Относительными равновесиями являются, например, стационарные вращения твердого тела, закрепленного в центре инерции, а также вращения тяжелого твердого тела с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси.

Теорема [1]. *Фазовая кривая системы с G-инвариантной функцией Гамильтона является относительным равновесием тогда и только тогда, когда она является орбитой однопараметрической подгруппы группы G в исходном фазовом пространстве.* (Напомним, что действие группы G_p на M_p предполагается свободным.)

Пусть теперь $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — окружность. Предположим, что группа G действует на конфигурационном многообразии V без неподвижных точек. Приведенное фазовое пространство F_p пуассоновского действия G на T^*V симплектоморфно скрученному кокасательному расслоению профакторизованного конфигурационного многообразия V/G. Редукция натуральной гамильтоновой системы на T^*V с G-инвариантной потенциальной и кинетической энергией приводит к натуральной системе в магнитном поле (см. п. 1.2), равном нулю лишь при $p = 0$.

Пусть асимметричное твердое тело, закрепленное в точке, находится под действием силы тяжести или иной потенциальной силы, симметричной относительно вертикальной оси. Приведенное конфигурационное пространство в этом случае — двумерная сфера $S^2 = \mathbf{SO}_3/S^1$.

Следствие 1. *Асимметричное твердое тело в осесимметричном потенциальном поле, закрепленное в точке на оси поля, имеет не менее двух стационарных вращений (при каждом значении момента импульса относительно оси симметрии).*

Следствие 2. *Осесимметричное твердое тело, закрепленное в точке на оси симметрии, имеет не менее двух стационарных вращений (при каждом значении момента импульса относительно оси симметрии) в любом потенциальном силовом поле.*

Оба следствия основаны на том, что функция на сфере — потенциал приведенного движения — имеет не менее двух критических точек.

3.7. Некоммутативная интегрируемость гамильтоновых систем. Предположим, что гамильтониан H системы инвариантен относительно пуассоновского действия группы Ли G на фазовом многообразии M, и $p \in \mathfrak{g}^*$ — регулярное значение отображения моментов $P\colon M \to \mathfrak{g}^*$.

Теорема. *Если размерность фазового многообразия равна сумме размерности алгебры $\mathfrak{g}$ и ее ранга, то множество M_p регулярного уровня общего положения отображения моментов не особо и имеет каноническую аффинную структуру. В этой аффинной структуре фазовый поток инвариантного гамильтониана H выпрямляется. Каждая компактная компонента связности множества M_p является тором, на котором фазовый поток условно периодичен.*

Замечание 1. Напомним, что рангом алгебры Ли называется коразмерность орбит общего положения в коприсоединенном представлении.

Замечание 2. Сформулированная теорема обобщает теорему Лиувилля о полной интегрируемости: в том случае группа G была коммутативной группой ($\mathbb{R}^n$) ранга n, действовавшей на симплектическом многообразии размерности $2n = \dim G + \operatorname{rk} G$.

Доказательство.

Предположение $\dim M = \dim G + \operatorname{rk} G$ вместе с регулярностью общего значения p отображения моментов влечет, что $\dim M_p = \operatorname{rk} G = \dim G_p$, т. е. каждая связная компонента K уровня M_p является фактор-пространством (связной компоненты) группы G_p по дискретной подгруппе. По теореме Дюфло (п. 3.3, гл. 2) алгебра $\mathfrak{g}_p$ (для общего $p \in \mathfrak{g}$) коммутативна, т. е. $K = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$ и в компактном случае является тором. Выпрямление потока легко выводится из инвариантности гамильтониана H. ■

Пример. Рассмотрим кеплерову задачу о движении материальной точки в ньютоновском гравитационном потенциале неподвижного центра: $H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{r}$, r — расстояние до центра, p — импульс. Гамильтониан H инвариантен относительно группы вращений $\mathbf{SO_3}$ и его поток вместе с действием группы $\mathbf{SO_3}$, образует пуассоновское действие четырехмерной группы $G = \mathbb{R} \times \mathbf{SO_3}$ ранга 2 в пространстве $T^*\mathbb{R}^3$ размерности $6 = 4 + 2$. Поэтому кеплерова задача интегрируема в некоммутативном смысле. То же самое относится к любой натуральной системе в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со сферически симметричным потенциалом: фазовый поток такой системы выпрямляется на двумерных совместных уровнях вектора момента импульса и энергии.

Как видно из формулировки теоремы (и из примера), движение в системе, интегрируемой в некоммутативном смысле, происходит по торам размерности меньшей половины размерности фазового пространства, то есть такие системы вырождены по сравнению с общими вполне интегрируемыми системами.

Теорема [21]. *Если гамильтонова система на компактном симплектическом многообразии M^{2n} обладает алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ почти всюду независимых первых интегралов, причем $\dim \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g} = 2n$, то существует другой набор из n почти всюду независимых интегралов в инволюции.*

Геометрически это означает, что инвариантные торы маленькой размерности $\operatorname{rk} \mathfrak{g}$ объединяются в торы половинной размерности.

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ первых интегралов на произвольном симплектическом многообразии утверждение теоремы вытекает из предложения: на пространстве $\mathfrak{g}^*$ существует $d = (\dim \mathfrak{g} - \operatorname{rk} \mathfrak{g})/2$ гладких функций в инволюции, независимых почти всюду на орбитах общего положения в $\mathfrak{g}^*$ (их размерность равна $2d$).

Это предложение доказано (на основе метода сдвига аргумента, п. 2.5) для широкого класса алгебр Ли, включая полупростые (см. [22]); его справедливость для всех алгебр Ли позволила бы доказать аналогичную теорему для произвольных, а не только компактных фазовых многообразий.

3.8. Пуассоновские действия торов. Набор k функций в инволюции на симплектическом многообразии задает пуассоновское действие коммутативной группы $\mathbb{R}^k$. Компактные орбиты этого действия неизбежно являются торами.

Здесь мы рассмотрим случай пуассоновского действия тора $\mathbf{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ на компактном симплектическом многообразии M^{2n}. При $k = n$ геометрию такого действия можно рассматривать как геометрию вполне интегрируемых систем, впрочем, довольно специального класса.

Пример. Гамильтониан $H\colon M \to \mathbb{R}$ на компактной симплектической поверхности задает пуассоновское действие аддитивной группы $\mathbb{R}$. Если это действие в действительности является действием группы $\mathbf{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, то функция H необходимо имеет своими критическими точками только невырожденные максимум и минимум, в частности, M^2 — сфера (рис. 23). Если это свойство функции H выполнено, то ее произведение с подходящей не обращающейся в нуль функцией является гамильтонианом пуассоновского действия группы T^1 на сфере.

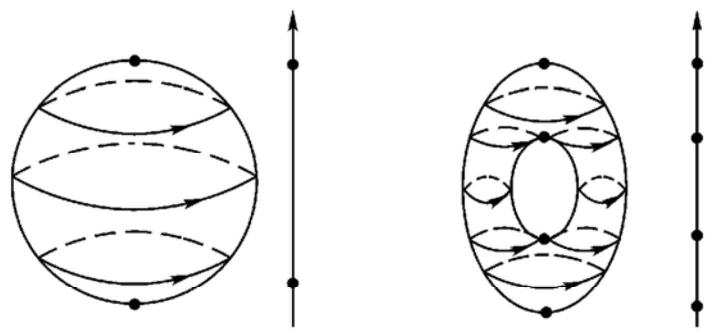


Рис. 23

Теорема [33]. *Пусть задано пуассоновское действие тора $\mathbf{T}^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ на компактном связном симплектическом многообразии M^{2n}. Тогда образ отображения моментов $P\colon M^{2n} \to (\mathbb{R}^k)^*$ является выпуклым многогранником. Более того, образ множества неподвижных точек действия группы $\mathbf{T}^k$ на M^{2n} состоит из конечного числа точек в $(\mathbb{R}^k)^*$ (называемых вершинами), и образ всего многообразия совпадает с выпуклой оболочкой множества вершин. Замыкание каждой связной компоненты объединения орбит размерности $r \leqslant k$ является симплектическим подмногообразием в M^{2n} коразмерности $\leqslant 2(k-r)$, на котором пуассоновским образом действует фактор-группа $\mathbf{T}^r = \mathbf{T}^k/\mathbf{T}^{k-r}$ тора $\mathbf{T}^k$ по стационарной подгруппе $\mathbf{T}^{k-r}$. Образ этого подмногообразия в $(\mathbb{R}^k)^*$ при отображении моментов (грань многогранника) является выпуклой оболочкой образа своих неподвижных точек, имеет раз-*

мерность r и лежит в подпространстве размерности r, параллельном (целочисленному) подпространству ковекторов в $(\mathbb{R}^k)^*$, аннулирующих касательные векторы к стабилизатору $\mathbf{T}^{k-r}$ в алгебре Ли $\mathbb{R}^k$ тора $\mathbf{T}^k$.

Замечание. В условиях теоремы слои отображения моментов связны. Выпуклость образа выводится отсюда индукцией по размерности тора.

Пример. Классическим источником этой теоремы являются неравенства Шура (I. Shur) для эрмитовых матриц: вектор диагональных элементов эрмитовой матрицы лежит в выпуклой оболочке векторов, полученных перестановками из набора ее собственных чисел (см. рис. 24).

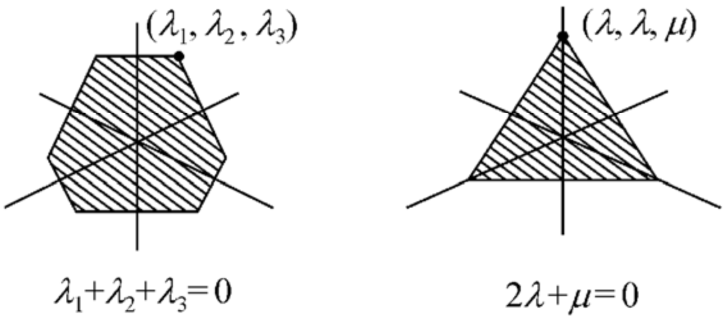


Рис. 24

Действительно, рассмотрим коприсоединенное действие группы $\mathbf{SU}_{n+1}$ специальных унитарных матриц. Оно изоморфно присоединенному действию в алгебре Ли косоэрмитовых матриц со следом нуль. Пространство таких матриц умножением на $\sqrt{-1}$ отождествляется с пространством эрмитовых $(n+1)\times(n+1)$-матриц со следом нуль, и мы можем считать, что в последнем пространстве задано действие группы $\mathbf{SU}_{n+1}$, орбиты которого — компактные симплектические многообразия. Максимальный тор $\mathbf{T}^n = \{\operatorname{diag}(e^{i\varphi_0}, \ldots, e^{i\varphi_n}) \mid \sum \varphi_k = 0\}$ группы $\mathbf{SU}_{n+1}$ действует пуассоновским образом на каждой такой орбите. Отображение моментов сопоставляет эрмитовой матрице (ω_{kl}) вектор ее диагональных элементов $(\omega_{00}, \ldots, \omega_{nn})$ в пространстве $\mathbb{R}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \mid \sum x_k = 0\}$. Неподвижными точками действия тора на орбите являются диагональные матрицы $\operatorname{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ этой орбиты.

Другим специфическим свойством пуассоновских действий торов является *формула интегрирования* [41]. В простейшем случае пуассоновского действия окружности $\mathbf{T}^1$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) она имеет следующий вид. Пусть $H\colon M^{2n} \to \mathbb{R}^*$ — гамильтониан действия. С каждым его критическим значением $p \in \mathbb{R}^*$ свяжем целое число $E(p)$, равное произведению ненулевых собственных чисел, деленных на 2π, квадратичной части гамильтониана H в критической точке $m \in H^{-1}(p)$. Тогда

$$\int\limits_M e^{itH}\omega^n = \frac{n!}{(it)^n}\sum_p \frac{e^{-itp}}{E(p)},$$

где сумма берется по всем критическим значениям. Преобразованием Фурье отсюда получается, что функция

$$f(h) = \int\limits_{H=h} \frac{\omega^n}{dH}$$

(объем слоя над $h \in \mathbb{R}^*$) — полином степени $\leqslant n-1$ на каждом интервале множества регулярных значений гамильтониана H.

В качестве другого следствия формулы интегрирования находим выражение объема многообразия M через характеристики множества неподвижных точек действия:

$$\int\limits_M \omega^n = (-1)^n n! \sum_p \frac{p^n}{E(p)}$$

и ряд соотношений на критические значения функции

$$H\colon \sum_p \frac{p^n}{E(p)} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k < n.$$

Аналогичные результаты справедливы и для действий торов большей размерности. Предмет этого пункта оказался связанным с теорией вычетов, методом стационарной фазы, характеристическими классами, эквивариантными когомологиями, многогранниками Ньютона, торическими многообразиями, вычислением характеров неприводимых представлений групп Ли (см. [34], [49]).

Глава 4
Контактная геометрия

Контактная геометрия — нечетномерный двойник симплектической. Связь между ними подобна соотношению проективной и аффинной геометрий.

§ 1. Контактные многообразия

1.1. Контактная структура. Говорят, что на гладком многообразии задано поле гиперплоскостей, если в касательном пространстве к каждой точке задана гиперплоскость, гладко зависящая от точки приложения. Поле гиперплоскостей локально определяется дифференциальной 1-формой α, не обращающейся в нуль: $\alpha|_x = 0$ — уравнение гиперплоскости поля в точке x. Поле гиперплоскостей на $(2n+1)$-мерном многообразии называется *контактной структурой,* если форма $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ невырождена. Независимость этого требования от выбора определяющей 1-формы α мгновенно проверяется. Смысл определения контактной структуры становится более ясным, если рассмотреть вопрос о существовании интегральных многообразий поля гиперплоскостей, т. е. таких подмногообразий, которые в каждой своей точке касаются гиперплоскости поля. Если через точку x проходит интегральная гиперповерхность, то $\alpha \wedge d\alpha|_x = 0$. Поэтому контактную структуру можно назвать «максимально неинтегрируемым» полем гиперплоскостей. В действительности размерность интегральных многообразий контактной структуры на $(2n+1)$-мерном многообразии не превосходит n. Для доказательства заметим, что форма $d_x\alpha$ задает на гиперплоскости поля в точке x симплектическую структуру, в которой касательное пространство к интегральному подмногообразию, проходящему через x, является изотропным.

Интегральные подмногообразия размерности n в $(2n+1)$-мерном контактном многообразии называются *лежандровыми.* Гладкое расслоение контактного многообразия, все слои которого лежандровы, называется *лежандровым расслоением.*

Диффеоморфизмы контактных многообразий, сохраняющие контактную структуру, мы будем называть *контактоморфизмами.*

Теорема Дарбу для контактных многообразий. *Контактные многообразия одинаковой размерности локально контактоморфны.*

Следствие. *В окрестности каждой точки контактного* $(2n+1)$*-мерного многообразия существуют координаты* $(z, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$*, в которых контактная структура имеет вид*

$$dz = \sum p_k \, dq_k.$$

Действительно, $dz = \sum p_k \, dq_k$ — контактная структура в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Мы будем называть эту структуру *стандартной,* а координаты (z, p, q) — *контактными координатами Дарбу.*

Теорема Дарбу для лежандровых расслоений. *Лежандровы расслоения контактных многообразии одинаковой размерности локально изоморфны, т. е. существует локальный контактоморфизм пространств расслоений, переводящий слои в слои.*

Следствие. *В окрестности каждой точки пространства лежандрова расслоения существуют контактные координаты Дарбу* (z, p, q)*, в которых расслоение задается проекцией* $(z, p, q) \mapsto (z, q)$.

Действительно, слои $(z, q) = \mathrm{const}$ — лежандровы подпространства стандартного контактного пространства.

1.2. Примеры. А. Проективное пространство. Пусть V — $(2n+2)$-мерное симплектическое линейное пространство, $\mathbf{P}(V)$ — его проективизация. $\mathbf{P}(V)$ следующим образом наделяется контактной структурой: гиперплоскость контактной структуры в точке $l \in \mathbf{P}(V)$ задается гиперплоскостью $\mathbf{P}(H) \subset \mathbf{P}(V)$, проходящей через l, где H — косоортогональное дополнение к прямой $l \subset V$. В координатах Дарбу $(q_0, \ldots, q_n, p_0, \ldots, p_n)$ на V и аффинной карте $q_0 = 1$ на $\mathbf{P}(V)$ эта структура имеет вид $dp_0 = \sum p_k \, dq_k - q_k \, dp_k$, $k \geqslant 1$, откуда следует ее максимальная неинтегрируемость. Лежандровы подпространства в $\mathbf{P}(V)$ — это проективизации лагранжевых подпространств в V.

Введенная в $\mathbf{P}(V)$ контактная структура задает изоморфизм между $\mathbf{P}(V)$ и двойственным проективным пространством $\mathbf{P}(V^*)$ гиперплоскостей в $\mathbf{P}(V)$, при котором каждая точка лежит в соответствующей ей гиперплоскости. Обратно, каждый изоморфизм $\mathbf{P}^{2n+1}$ и $\mathbf{P}^{*2n+1}$

с таким свойством инцидентности задается симплектической структурой в подлежащем векторном пространстве и, следовательно, определяет контактную структуру в $\mathbf{P}^{2n+1}$. Действительно, изоморфизм $\mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(V^*)$ поднимается до изоморфизма V и V^*, т. е. невырожденной билинейной формы на V; сформулированное условие инцидентности равносильно кососимметричности этой формы.

Б. *Многообразие контактных элементов. Контактным элементом* на многообразии M, приложенным в данной точке, называется гиперплоскость в касательном пространстве в этой точке. Все контактные элементы на M образуют пространство PT^*M *проективизованного кокасательного расслоения.* Следующее правило определяет контактную структуру на PT^*M: вектор скорости движения контактного элемента принадлежит гиперплоскости контактного поля, если вектор скорости точки приложения контактного элемента принадлежит самому контактному элементу (рис. 25). В координатах Дарбу $(q_0, \ldots, q_n, p_0, \ldots, p_n)$ на T^*M и аффинной карте $p_0 = 1$ на PT^*M эта структура задается обращением в нуль формы действия:

$$dq_0 + p_1\,dq_1 + \ldots + p_n\,dq_n = 0.$$

Пусть X — гладкое подмногообразие в M. Рассмотрим множество $L(X)$ контактных элементов на M, приложенных в точках X и касающихся X. $L(X)$ — лежандрово подмногообразие в PT^*M. В частном случае, когда X — точка, $L(X)$ — проективное пространство всех контактных элементов на M, приложенных в этой точке. Таким образом, расслоение $PT^*M \to M$ — лежандрово.

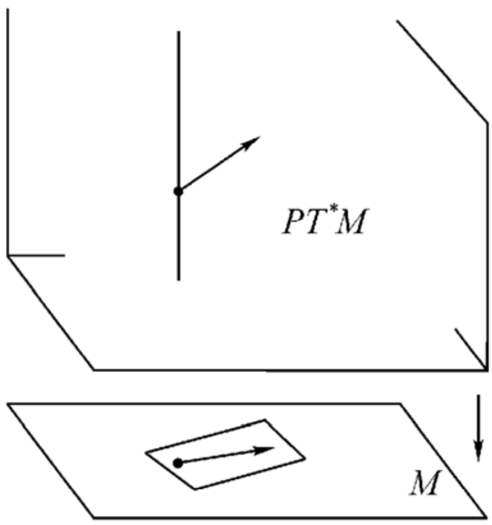


Рис. 25

В. *Пространство* 1-*струй функций.* 1-струя гладкой функции f в точке x (обозначение $j^1_x f$) — это $(x, f(x), d_x f)$. Пространство $J^1M = \mathbb{R} \times T^*M$ 1-струй функций на многообразии M имеет контактную структуру $du = \alpha$, где u — координата на оси $\mathbb{R}$ значений функций, $\alpha = \sum p_k\,dq_k$ — 1-форма действия на T^*M. 1-график функции f (обозначение $j^1 f$) состоит из 1-струй функции во всех точках. $j^1 f$ — лежандрово подмногообразие в J^1M.

Проекция $J^1M \to \mathbb{R} \times M$ вдоль слоев кокасательного расслоения многообразия M — лежандрово расслоение.

Аналогично определяются контактная структура и лежандрово расслоение пространства 1-струй сечений одномерного векторного расслоения над M (не обязательно тривиального) над пространством этого расслоения.

Г. Фазовое пространство термодинамики. Процитируем начало статьи Гиббса (J. W. Gibbs) «Графические методы в термодинамике жидкостей» [43]: «Мы рассмотрим следующие величины: v — объем, p — давление, t — температура (абсолютная), ε — энергия, η — энтропия данного тела в некотором состоянии, а также W — работа, совершаемая телом при переходе из одного состояния в другое, и H — тепло, получаемое телом при этом переходе. Эти величины подчиняются соотношениям, выражаемым следующими дифференциальными уравнениями: $\ldots d\varepsilon = dH - dW$, $dW = p\,dv$, $dH = t\,d\eta$. Исключая dW и dH, получим

$$d\varepsilon = t\,d\eta - p\,dv. \tag{1}$$

Величины v, p, t, ε и η определены, если задано состоянием тела, и поэтому их можно назвать функциями состояния тела. Состояние тела в том смысле, в котором этот термин применяется в термодинамике жидкостей, допускает существование двух независимых вариаций, так что между пятью величинами v, p, t, ε и η существуют соотношения, выражаемые тремя конечными уравнениями, которые для разных веществ, вообще говоря, различны, но никогда не противоречат дифференциальному уравнению (1)».

В нашей терминологии состояния тела образуют лежандрову поверхность в пятимерном фазовом пространстве термодинамики, снабженном контактной структурой (1).

1.3. Геометрия подмногообразий контактного пространства. Подмногообразие контактного многообразия несет индуцированную структуру. Локально эта структура задается ограничением определяющей 1-формы на его касательное расслоение. Формы, получаемые друг из друга умножением на необращающуюся в нуль функцию, задают одну и ту же индуцированную структуру. Так определенная индуцированная структура тоньше, чем просто поле касательных подпространств, высекаемое на подмногообразии гиперплоскостями контактной структуры. Например, контактная структура $du = p\,dq$ индуцирует на кривых $u = p - q = 0$ и $u = p - q^2 = 0$ не диффеоморфные структуры в окрестности точки 0.

Пример 1. В окрестности общей точки четномерного подмногообразия общего положения в контактном пространстве существует система координат $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$, в которой индуцированная структура имеет вид $dy_1 + x_2\,dy_2 + \ldots + x_k\,dy_k = 0$. Необщие точки образуют множество коразмерности больше или равной 2.

Пример 2. В окрестности общей точки нечетномерного подмногообразия в контактном пространстве индуцированная структура контактная, а в окрестности точек некоторой гладкой гиперповерхности — приводится к одной из двух (не эквивалентных) нормальных форм $\pm du^2 + (1 + x_1)\,dy_1 + x_2\,dy_2 + \ldots + x_k\,dy_k = 0$ [58].

Индуцированная структура определяет «внешнюю» геометрию подмногообразия, по меньшей мере локально:

А. **Относительная теорема Дарбу для контактных структур.** *Пусть N — гладкое подмногообразие многообразия M, γ_0, γ_1 — две контактные структуры, совпадающие на TN. Тогда для любой точки x в N существует диффеоморфизм $U_0 \to U_1$ в окрестностей точки x в M, который тождествен на $N \cap U_0$ и переводит $\gamma_0|_{U_0}$ в $\gamma_1|_{U_1}$.*

В частном случае $N = \{\text{точка}\}$ получаем теорему Дарбу для контактных многообразий п. 1.1.

Дифференциальную 1-форму на многообразии, задающую на нем контактную структуру, будем называть *контактной формой.* Контактная форма α определяет поле направлений — поле ядер 2-формы $d\alpha$. Так, форме $du - \sum p_k\,dq_k$ отвечает поле направлений $\dfrac{\partial}{\partial u}$. Назовем контактную форму α трансверсальной к подмногообразию, если поле ядер формы $d\alpha$ нигде его не касается.

Б. **Относительная теорема Дарбу для контактных форм.** *Пусть α_0 и α_1 — две контактные формы на многообразии M, трансверсальные к подмногообразию N, совпадающие на TN и лежащие в одной связной компоненте множества контактных форм с этими свойствами. Тогда существует диффеоморфизм окрестностей подмногообразия N в M, тождественный на N и переводящий α_1 в α_0.*

Следствие. *Контактная форма локально приводится к виду $du - \sum p_k\,dq_k$.*

Переходим к доказательству теорем А и Б.

Лемма. *Теорема А следует из теоремы Б.*

Доказательство.

Можно считать, что $M = \mathbb{R}^{2n+1}$, $x = 0$, N — линейное подпространство в M, γ_0 и γ_1 задаются контактными формами α_0 и α_1 соответственно. Умножением α_1 на обратимую функцию добьемся совпадения α_0 и α_1 на TN и умножением форм α_0 и α_1 на одну и ту же обратимую функцию сделаем их трансверсальными по отношению к N в нуле.

Существует тождественное на N линейное преобразование пространства M, переводящее $\alpha_0|_x$ в $\alpha_1|_x$ и $d_x\alpha_0$ в $d_x\alpha_1$. Действительно, линейным преобразованием $A\colon M \to M$ переведем $\alpha_0|_x$ в $\alpha_1|_x$ и $\ker_x d\alpha_0$ в $\ker_x d\alpha_1$ причем так, чтобы $\pi A|_N = \pi|_N$, где $\pi\colon M \to \ker_x \alpha_1$ — проекция вдоль $\ker_x d\alpha_1$. Формы $d_x\alpha_0$ и $d_x\alpha_1$ задают на $\ker_x \alpha_1$ две симплектические структуры, совпадающие на $\pi(N)$. Их можно отождествить линейным преобразованием, тождественным на $\ker_x d\alpha_1$ и на $\pi(N)$ (ср. § 1, гл. 1). Поскольку $N \subset \ker_x d\alpha_1 \oplus \pi(N)$ есть график функции $\alpha_1|_N$, то результирующее преобразование обладает требуемыми свойствами.

Теперь $t\alpha_0 + (1-t)\alpha_1$, $t \in [0, 1]$ — семейство контактных форм, совпадающих на TN и трансверсальных по отношению к N в точке x, а следовательно, и в некоторой ее окрестности. Лемма доказана. ■

Доказательство теоремы Б. Следуя гомотопическому методу (см. п. 1.3, гл. 2), мы приходим к уравнению

$$L_{V_t}\alpha_t + \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} = 0,$$

где α_t — гладкое семейство трансверсальных к N контактных форм, совпадающих на TN. Это уравнение мы хотим разрешить относительно семейства векторных полей V_t, равных нулю на N. Предоставим читателю следить за гладкостью дальнейших конструкций по t.

Контактная форма α задает тривиализацию расслоения $\ker d\alpha$. Если α трансверсальна к N, мы можем считать, что окрестность многообразия N в M есть тривиальное расслоение $\mathbb{R} \times P \to P\colon (u, x) \mapsto x$ на интегральные кривые поля направлений $\ker d\alpha$, где координата u в слоях выбрана так, чтобы $i_{\partial/\partial u}\alpha \equiv 1$, $N \subset \{0\} \times P$.

Мы хотим представить 1-форму $\partial\alpha/\partial t$, равную нулю на TN, в виде суммы $\beta + df$, где β не зависит от du, $\beta|_{T_N M} = 0$ и $f|_N = 0$. После этого можно будет положить $V = W - (f + i_V \alpha)\partial/\partial u$, где поле W не зависит от $\partial/\partial u$ и определяется из уравнения $i_W \, d\alpha + \beta = 0$.

Положим

$$\mathscr{F}(u, x) = \int_0^u \Big[i_{\partial/\partial u}\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big)\Big](\xi, x)\, d\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\mathscr{F}|_N = 0$ и $\dfrac{\partial\alpha}{\partial t} = \beta' + d\mathscr{F}$, где β' не зависит от du и $\beta'|_{T_N M} = 0$. Используя относительную лемму Пуанкаре из п. 1.5 гл. 2, мы можем представить β' в виде $\beta' = \beta + d\varphi$, где β и $f = \mathscr{F} + \varphi$ удовлетворяют выдвинутым требованиям. Теорема Б доказана. ■

1.4. Вырождения дифференциальных 1-форм в $\mathbb{R}^n$. Дифференциальная 1-форма общего положения в окрестности точки общего положения приводится диффеоморфизмом к нормальной форме Дарбу

$$du + x_1\, dy_1 + \ldots + x_m\, dy_m \qquad (n = 2m + 1)$$

или

$$(1 + x_1)dy_1 + x_2\, dy_2 + \ldots + x_m\, dy_m \qquad (n = 2m),$$

а в окрестности точки на некоторой гладкой гиперповерхности — к нормальной форме Мартине

$$\pm du^2 + (1 + x_1)dy_1 + x_2\, dy_2 + \ldots + x_m\, dy_m \qquad (n = 2m + 1)$$

или

$$(1 \pm x_1)dy_1 + x_2\, dy_2 + \ldots + x_m\, dy_m \qquad (n = 2m)$$

([58], ср. п. 1.3).

Теорема [14]. *Дифференциальная* 1*-форма в окрестности точки, где она не обращается в нуль, либо эквивалентна одной из нормальных форм Дарбу и Мартине* (*J. Martinet*) *либо ее класс эквивалентности не определяется никакой струей конечного порядка* (*т. е. конечным отрезком ряда Тейлора в рассматриваемой точке*).

Замечание. Класс эквивалентности формы Дарбу определяется 1-струей, а формы Мартине — 2-струей.

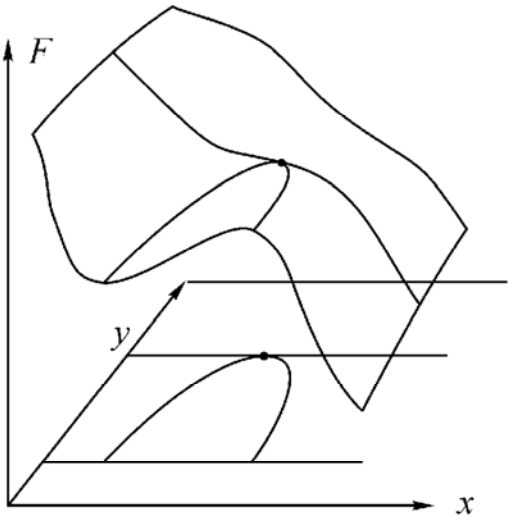


Рис. 26

Пример. Дифференциальная 1-форма общего положения на плоскости в окрестности точки, где она не обращается в нуль, приводится к виду $F(x, y)dy$ и задает поле направлений $dy = 0$. На интегральных кривых $y = \text{const}$ этого поля рассмотрим семейство функций $F(\cdot, y)$. Если в рассматриваемой точке сливаются две критические точки функций семейства (рис. 26), мы можем выбрать параметр y так, чтобы сумма критических значений функций $F(\cdot, y)$ была равна 1. Тогда разность критических значений, рассматриваемая как функция параметра, будет функциональным инвариантом класса эквивалентности нашей 1-формы. В частности, конечное число коэффициентов ряда Тейлора не определяет класс эквивалентности.

Исследование 1-форм в окрестности особых точек см. в [18]. Оно приводит к следующей задаче. Пусть v — такое векторное поле в симплектическом пространстве со структурой ω, что $L_v\omega = \omega$. Существует ли симплектоморфизм окрестности особой точки поля, переводящий v в его линейную часть в этой точке? Связь этой задачи с исходной такова. Дифференциал 1-формы α общего положения в четномерном пространстве в окрестности особой точки задает симплектическую структуру ω. Для поля v, определенного условием $i_v\omega = \alpha$, получаем $L_v\omega = di_v\omega = d\alpha = \omega$.

Теорема [18]. *Для того чтобы любое векторное поле v в симплектическом пространстве $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ с заданной линейной частью V в особой точке, обладающее свойством $L_v\omega = \omega$, было симплектически эквивалентно V, необходимо и достаточно, чтобы между собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ поля V не было соотношений вида*

$$\sum m_k\lambda_k = 1, \quad 0 \leqslant m_k \in \mathbb{Z}, \quad \sum m_k \geqslant 3.$$

Заметим, что как векторное поле v, так и его линейная часть являются суммой эйлерова поля

$$E = \frac{1}{2}\sum x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

и гамильтонова поля с особой точкой в начале координат. Поэтому спектр поля V симметричен относительно $\lambda = \frac{1}{2}$. 1-форма $i_E\omega$ в координатах Дарбу имеет вид $\sum (p_k\, dq_k - q_k\, dp_k)/2$.

Следствие. *Гиперповерхность общего положения в контактном пространстве в окрестности точки касания с гиперплоскостью контактного поля подходящим выбором координат, в которых контактная структура имеет вид* $dt = \sum(p_k\, dq_k - q_k\, dp_k)$, *приводится к нормальной форме* $t = Q(p, q)$, *где* Q *— невырожденный квадратичный гамильтониан.*

§ 2. Симплектизация и контактные гамильтонианы

Симплектизация сопоставляет контактному многообразию симплектическое многообразие на единицу большей размерности. Мы приводим описание алгебры Ли инфинитезимальных контактоморфизмов, основанное на свойствах этой операции. Обсуждается двойственная к ней операция контактизации.

2.1. Симплектизация. Пусть M — контактное многообразие. Рассмотрим пространство L одномерного расслоения $L \to M$, слой которого над точкой $x \in M$ образован всеми ненулевыми линейными функциями на касательном пространстве T_xM, обращающимися в нуль на гиперплоскости контактного поля в точке x. Такие функции мы будем называть контактными функционалами. Задание L как подрасслоения в кокасательном расслоении T^*M эквивалентно введению контактной структуры на M. На многообразии L канонически определена дифференциальная 1-форма α: значение α на касательном векторе v, приложенном в точке $\xi \in L$, равно значению контактного функционала ξ на образе вектора v при проекции $L \to M$ (рис. 27).

Пример. Пусть $M = PT^*B$ — проективизованное кокасательное расслоение с канонической контактной структурой. Тогда $L = T^*B \setminus B$ — кокасательное расслоение с выколотым нулевым сечением, α — 1-форма действия на T^*B.

В общем случае 1-форма α на многообразии L определяет симплектическую структуру $d\alpha$. Ее невырожденность вытекает из приведенного примера, ввиду локальной единственности контактной структуры.

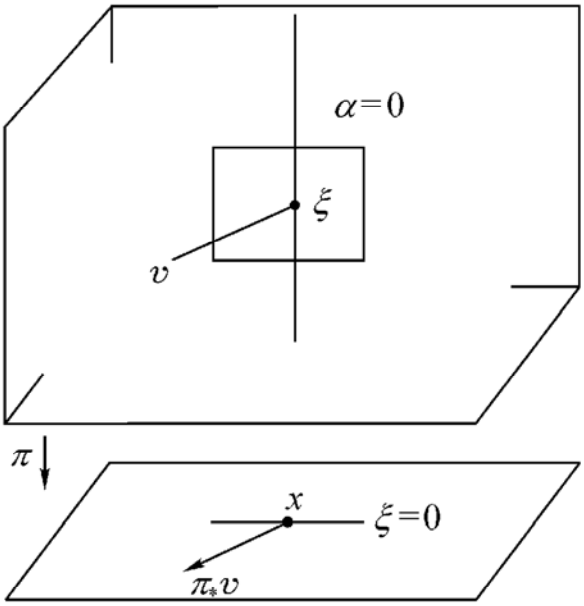


Рис. 27

Определение. Симплектическое многообразие $(L,\, d\alpha)$ называется *симплектизацией* контактного многообразия M.

Мультипликативная группа $\mathbb{R}^\times$ ненулевых скаляров действует на L умножением контактных функционалов на константы. Это действие превращает $L \to M$ в главное расслоение. Симплектическая структура $d\alpha$ однородна степени 1 относительно этого действия. Обратно, главное $\mathbb{R}^\times$-расслоение $N \to M$ симплектического многообразия с однородной степени 1 симплектической структурой задает контактную структуру на M, для которой N является симплектизацией.

Свойства симплектизации.

А. Вложение $L \hookrightarrow T^*M$ и проекция $L \to M$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между контактоморфизмами многообразия M и симплектоморфизмами многообразия L, коммутирующими с действием группы $\mathbb{R}^\times$.

Б. Проекция симплектизации $L \to M$ задает взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{R}^\times$-инвариантными («коническими») лагранжевыми подмногообразиями в L и лежандровыми подмногообразиями в M.

В. Композиция проекции $L \to M$ и лежандрова расслоения $M \to B$ определяет $\mathbb{R}^\times$-инвариантное лагранжево расслоение $L \to B$, и обратно. Используя $\mathbb{R}^\times$-инвариантную версию теоремы Дарбу для лагранжевых расслоений, отсюда легко вывести теорему Дарбу для лежандровых расслоений.

Г. Слои лагранжева расслоения несут каноническую аффинную структуру (см. п. 4.2, гл. 2). Вместе с $\mathbb{R}^\times$-действием на пространстве симплектизации это позволяет ввести в слоях лежандрова расслоения каноническую проективную структуру. Явным образом эта проективная структура описывается так. Гиперплоскость контактного поля в точке $x \in M$ содержит касательное пространство к слою расслоения $\pi\colon M \to B$, проходящему через x и, следовательно, проектируется в контактный элемент на B, приложенный в точке $\pi(x)$. Мы получаем локальный контактоморфизм $M \to PT^*B$, отображающий лежандровы слои в слои.

Следствие. *Лежандрово расслоение с компактным слоем канонически контактоморфно проективизованному кокасательному расслоению базы либо его послойному накрытию, т. е. сферизованному кокасательному расслоению, если размерность слоя больше единицы* (*в случае одномерного слоя различных накрытий — счетное число*).

2.2. Алгебра Ли инфинитезимальных контактоморфизмов. Векторные поля на контактном многообразии, локальные потоки которых сохраняют контактную структуру, называются *контактными векторными полями.* Такие поля, очевидно, образуют подалгебру Ли алгебры Ли всех векторных полей на контактном многообразии.

Следующим образом определим симплектизацию контактного векторного поля: это векторное поле на симплектизации контактного многообразия, поток которого есть симплектизация потока исходного контактного поля.

Теорема. *Симплектизация контактных векторных полей задает изоморфизм алгебры Ли таких полей и алгебры Ли локально гамильтоновых $\mathbb{R}^\times$-инвариантных векторных полей на симплектизации контактного многообразия. Гамильтониан такого поля прибавлением константы можно сделать однородным степени* 1.

Предположим теперь, что контактная структура на многообразии задается глобально определенной дифференциальной 1-формой α. Контактная форма о определяет сечение расслоения $L \to M$ контактных функционалов. Таким образом, существование формы α равносильно тривиальности этого расслоения. Коль скоро сечение выбрано, оно задает взаимно однозначное соответствие между однородными степени 1 гамильтонианами из L и функциями на M.

Определение. *Контактным гамильтонианом* контактного векторного поля на M называется функция на M, равная в точке x значению однородного гамильтониана симплектизации этого векторного поля на контактном функционале $\alpha|_x$, рассматриваемом как точка слоя над x в расслоении $L \to M$.

Приведем координатные формулы для контактного поля V_k функции K. Пусть $\alpha = du - p\,dq$ (мы опускаем знак суммы). Тогда (в обозначениях $dK = K_u\,du + K_p\,dp + K_q\,dq$)

$$V_K = (K - pK_p)\frac{\partial}{\partial u} + (K_q + pK_u)\frac{\partial}{\partial p} - K_p\frac{\partial}{\partial q}.$$

Следствие 1. *Контактный гамильтониан K контактного поля V равен значению формы α на этом поле: $K = i_V\alpha$.*

Следствие 2. *Соответствие $V \mapsto i_V\alpha$ взаимно однозначно отображает пространство контактных полей на пространство гладких функций. В частности, тривиальность расслоения $L \to M$ влечет глобальную гамильтоновость всех $\mathbb{R}^\times$-инвариантных локально гамильтоновых полей на L.*

Введенная таким образом структура алгебры Ли в пространстве гладких функций на M называется *скобкой Лагранжа.* Явное описание этой операции выглядит так. Контактный диффеоморфизм, сохраняя контактную структуру, умножает форму α на обратимую функцию. Поэтому мы можем контактному гамильтониану K сопоставить новую функцию φ_K по правилу $L_{V_K}\alpha = \varphi_K\alpha$. Тогда скобка Лагранжа $[F, G]$ двух функций примет вид $[F, G] = (L_{V_F}G - L_{V_G}F + F\varphi_G - G\varphi_F)/2$. В прежних координатных обозначениях

$$\varphi_F = F_u,$$
$$[F, G] = FG_u - F_uG - p(F_pG_u - F_uG_p) - F_pG_q + F_qG_p,$$

откуда, конечно, следует приведенная инвариантная формула для скобки Лагранжа. Из определения скобки Лагранжа вытекает неочевидное само по себе утверждение, что стоящее в правой части выражение удовлетворяет тождеству Якоби.

Скобка Лагранжа не задает пуассоновой структуры (§ 3, гл. 2), поскольку не удовлетворяет правилу Лейбница. Назовем *структурой Ли* на многообразии билинейную операцию $[\,,]$ в пространстве гладких функций, которая задает в этом пространстве структуру алгебры Ли и обладает свойством локальности, т. е. $[f, g]|_x$ зависит лишь от значений функций f, g и их частных производных любого порядка в точке x. Можно показать [16], что многообразие Ли канонически разбивается на гладкие симплектические и контактные многообразия. Этот результат — обобщение теоремы о симплектических слоях для пуассоновых многообразий. Аналоги других свойств пуассоновых структур (трансверсальные структуры, линеаризация и т. п.) для структур Ли не изучены.

2.3. Контактизация. Она определяется в том случае, если симплектическая структура на многообразии N задана как дифференциал 1-формы α. По определению, контактизация многообразия (N, α) — это многообразие $\mathbb{R} \times N$ с контактной структурой $du = \alpha$, где u — координата на $\mathbb{R}$.

Пример. Пусть N — симплектизация контактного многообразия. Так как симплектическая структура на N задается как дифференциал канонической 1-формы α, то контактизация N определена. В частном случае $N = T^*B$ контактизацией многообразия N является пространство 1-струй функций на B.

Для данного симплектического многообразия (N, ω) с точной симплектической структурой различный выбор потенциала α $(d\alpha = \omega)$ приводит к различным контактным структурам в $\mathbb{R} \times N$. Все же если разность двух потенциалов α_1, α_2 точна $(\alpha_1 - \alpha_2 = d\varphi)$, то соответствующие структуры эквивалентны в следующем смысле: сдвиг $(u, x) \mapsto (u + \varphi(x), x)$ является контактоморфизмом $(\mathbb{R} \times N, du - \alpha_1)$ на $(\mathbb{R} \times N, du - \alpha_2)$. Если замкнутая форма $\alpha_1 - \alpha_2$ не является полным дифференциалом, то эти контактные многообразия могут быть не контактоморфны.

Описанная ситуация типична. Симплектизация контактных объектов существует всегда и приводит к топологически тривиальному симплектическому объекту. Контактизация существует лишь при некоторых условиях топологической тривиальности и может давать неоднозначный результат. Вот еще один пример такого сорта. Пусть задана контактизация $\mathbb{R} \times N \to N$. Контактизацией лагранжева многообразия $\Lambda \subset N$ называется лежандрово подмногообразие $L \subset \mathbb{R} \times N$, диффеоморфно проектирующееся на Λ. Нетрудно убедиться, что контактизация лагранжева многообразия существует в том и только том случае, если замкнутая 1-форма $\alpha|_\Lambda$ на Λ точна. Если $\alpha|_\Lambda = d\varphi$, то можно положить $L = \{(\varphi(\lambda), \lambda) \in \mathbb{R} \times N \,|\, \lambda \in \Lambda\}$. Функция φ определена однозначно с точностью до прибавления локально постоянной функции на Λ, и мы видим, что контактизация неединственна. Допускающие контактизацию лагранжевы вложения будем называть *точными*.

2.4. Лагранжевы вложения в $\mathbb{R}^{2n}$. Окружность на симплектической плоскости не обладает контактизацией: интеграл $\int p\,dq$ равен площади области, ограниченной этой окружностью, и отличен от нуля. Другими словами, проекция лежандровой окружности в $\mathbb{R}^3$ на симплектическую плоскость имеет точки самопересечения. Вопрос о существовании точных лагранжевых вложении нетривиален уже для двумерного тора.

Теорема [3]. *Ориентируемое компактное лагранжево подмногообразие в симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ имеет нулевую эйлерову характеристику.*

Доказательство.

Индекс самопересечения ориентируемого подмногообразия в его трубчатой окрестности такой же, как в объемлющем пространстве. Индекс самопересечения в евклидовом пространстве — нулевой. Индекс самопересечения в трубчатой окрестности равен эйлеровой характеристике нормального расслоения. Для лагранжева подмногообразия нормальное расслоение изоморфно касательному.

В частности, сфера не вкладывается лагранжево в $\mathbb{R}^4$. Тор допускает лагранжевы вложения в $\mathbb{R}^4$. Существуют точные лагранжевы вложения тора в пространство $\mathbb{R}^4$ с нестандартной симплектической структурой. Точных лагранжевых вложений тора в стандартное симплектическое пространство нет. ■

Теорема (Громов (M. Gromov), 1984 г.). *Замкнутое n-мерное многообразие не имеет точных лагранжевых вложений в стандартное $2n$-мерное симплектическое пространство.*

Из этой теоремы, примененной к двумерному тору, следует существование симплектического многообразия, диффеоморфного $\mathbb{R}^4$, но не симплектоморфного никакой области в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^4$.

Теорему можно переформулировать так (см. [3]): компактная гиперповерхность фронта[1] в $J^0\mathbb{R}^n$ со всюду невертикальным касательным пространством имеет вертикальную хорду с параллельными касательными пространствами на концах (рис. 28).

[1]Определение фронта см. в п. 1.1 гл. 5.

Доказательство этого утверждения можно получить, используя обобщения геометрической теоремы Пуанкаре, обсуждавшимися в п. 4.3 гл. 2. Однако аргументы Громова отличны от описанных там вариационных методов и основаны на изучении квазикэлеровых структур на симплектическом многообразии. Возможности развитых им методов выходят далеко за рамки сформулированной теоремы.

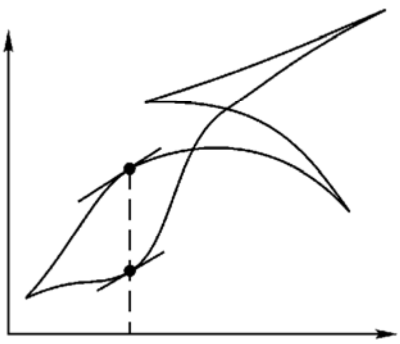


Рис. 28

§ 3. Метод характеристик

Уравнение в частных производных

$$\sum a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

выражает тот факт, что искомая функция u постоянна на фазовых кривых векторного поля $\sum a_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Оказывается, произвольное уравнение в частных производных первого порядка $F\Big(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, x\Big) = 0$ допускает сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на гиперповерхности $F(u, p, x) = 0$ в контактном пространстве 1-струй функций от x.

3.1. Характеристики на гиперповерхности в контактном пространстве. Пусть $\Gamma \subset M^{2n+1}$ — гиперповерхность в контактном многообразии. Характеристическим направлением $l(x)$ в точке $x \in \Gamma$ называется ядро ограничения дифференциала $d_x\alpha$ контактной 1-формы α на (вообще говоря, $(2n-1)$-мерное) пересечение $\Pi(x) \cap T_x\Gamma$ гиперплоскости контактного поля Π с касательным пространством к гиперповерхности. Эквивалентное определение: на прообразе гиперповерхности Γ при симплектизации $L^{2n+2} \to M^{2n+1}$ определено $\mathbb{R}^\times$-инвариантное поле направлений — косоортогональных дополнений к касательным гиперплоскостям. Проекция этого поля в M^{2n+1} определяет поле характеристических направлений на Γ. Оно имеет особые точки там, где Γ касается гиперплоскостей контактного поля Π. Интегральные кривые поля характеристических направлений называются *характеристиками гиперповерхности* Γ.

Предложение. *Пусть $N \subset \Gamma$ — интегральное подмногообразие контактной структуры, не касающееся характеристики гиперповерхности Γ, проходящей через точку $x \in N$. Тогда объединение характеристик Γ, проходящих через N в окрестности точки x, — снова интегральное подмногообразие.*

Следствие 3. *Если N — лежандрово, то характеристики, проходящие через N, лежат в N.*

Это свойство характеристик можно также взять в качестве их определения.

Следствие 4. *Если N имеет размерность $n-1$, то лежандрово подмногообразие в Γ, содержащее окрестность точки x в N, существует и локально единственно.*

3.2. Уравнение с частными производными первого порядка. Такое уравнение на n-мерном многообразии B задается гиперповерхностью Γ в пространстве J^1B 1-струй функций на B. Решением уравнения Γ называется гладкая функция на B, 1-график которой (см. п. 1.2) лежит на Γ. Согласно следствию 1 предыдущего пункта, 1-график решения состоит из характеристик гиперповерхности Γ.

Пусть D — гиперповерхность в B, φ — гладкая функция на D. Решением задачи Коши (A. Cauchy) для уравнения Γ с начальным условием (D, φ) называется решение уравнения Γ, совпадающее с φ на D. Заметим, что начальное условие определяет $(n-1)$-мерное подмногообразие $\Phi = \{(\varphi(x), x) \,|\, x \in D\}$ в пространстве $J^0B = \mathbb{R} \times B$. Это подмногообразие, как и любое подмногообразие базы лежандрова расслоения, определяет лежандрово подмногообразие $\Psi \subset J^1B$, состоящее из всевозможных продолжений 1-струй функции φ на D до 1-струй функций на B: $\Psi = \{(u, p, x) \,|\, x \in D,\ u = \varphi(x), \ldots, p|_{T_xD} = d_x\varphi\}$. Пересечение $N = \Psi \cap \Gamma$ называется начальным многообразием задачи Коши. Точка начального многообразия называется нехарактеристической, если в этой точке пересечение Ψ с Γ трансверсально (см. рис. 29). Заметим, что точки касания характеристик с начальным многообразием не удовлетворяют этому требованию.

Теорема. *Решение задачи Коши в окрестности нехарактеристической точки начального многообразия существует и локально единственно.*

1-график решения состоит из характеристик, пересекающих начальное многообразие в окрестности этой точки.

Координатные формулы. Пусть $\Gamma \subset J^1(\mathbb{R}^n)$ задается уравнением $F(u, p, x) = 0$. Тогда уравнение характеристик имеет вид

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_q - pF_u, \quad \dot{u} = pF_p.$$

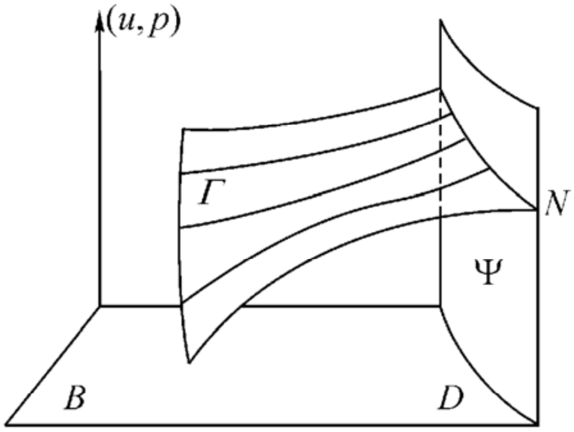


Рис. 29

Нехарактеристичность точки (u, p, x) начального многообразия эквивалентна тому, что вектор $F_p(u, p, x)$ не касается D в точке x. Другими словами, нехарактеристичность позволяет найти из уравнения производную искомой функции в точках D по нормали к D после того, как производные по касательным направлениям и значение функции определены начальным условием φ.

3.3. Геометрическая оптика. Прототипом метода характеристик служила известная в геометрической оптике эквивалентность описаний распространения света в терминах лучей и фронтов. Движение «световых корпускул» по прямым в $\mathbb{R}^n$ описывается гамильтонианом $H(p, q) = p^2$. Уравнение эйконала $(\partial u/\partial q)^2 = 1$ описывает распространение коротких световых волн: его решение, равное нулю на гиперповерхности D в $\mathbb{R}^n$ — это оптическая длина кратчайшего пути от источника света D до точки q. Проекция в $\mathbb{R}^n$ характеристик, составляющих 1-график функции u, — это нормальные прямые (лучи) к поверхностям уровня функции u (фронтам).

Решения уравнения эйконала могут быть многозначны, а фронты — иметь особенности. Например, при распространении света внутрь эллиптического источника на плоскости фронт приобретает полукубические точки возврата (рис. 30а). При движении фронта его особенности скользят по каустике (рис. 30б). Каустика может быть определена как множество центров кривизны источника или как огибающая семейства лучей. В окрестности каустики свет концентрируется. Особенности волновых фронтов и каустик будут изучены в гл. 5.

3.4. Уравнение Гамильтона–Якоби. *Уравнением Гамильтона–Якоби* называется уравнение вида $H\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, x\right) = 0$. Оно отличается

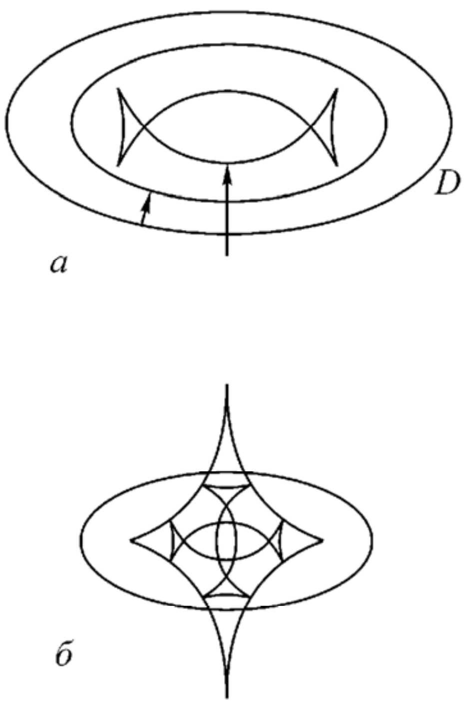


Рис. 30

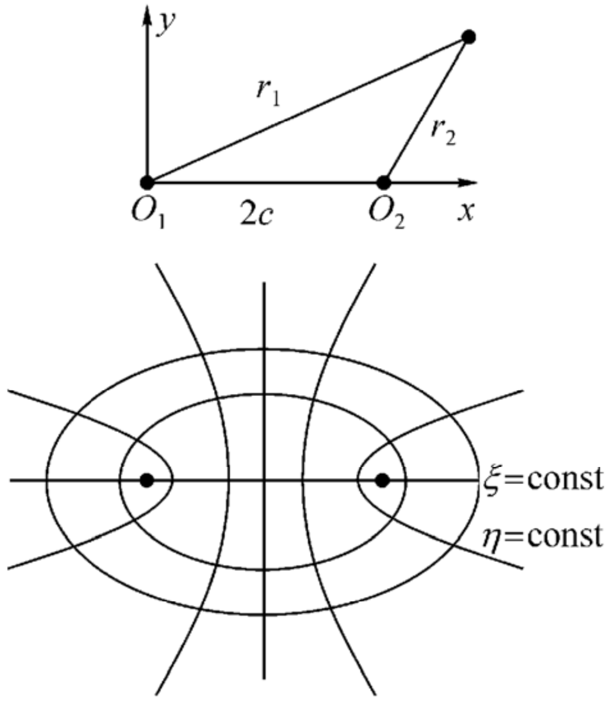


Рис. 31

от общего уравнения первого порядка тем, что не содержит явно искомой функции u. Интегрирование уравнений характеристик сводится, по-существу, к интегрированию гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(p,\,q)$. Уравнение эйконала — частный случай уравнения Гамильтона–Якоби.

В механике очень эффективным оказался обратный методу характеристик путь интегрирования гамильтоновых систем со сведением к решению уравнения Гамильтона–Якоби.

Теорема Якоби. *Пусть $u(Q,\,q)$ — решение уравнения Гамильтона–Якоби $H\left(\dfrac{\partial u}{\partial q}, q\right)=h$, зависящее от n параметров $Q=(h, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ и n переменных q. Предположим, что уравнение $\dfrac{\partial u(Q,\,q)}{\partial q} = p$ разрешимо относительно Q, в частности, $\det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial q \partial Q}\right) \neq 0$. Тогда функции $Q(p,\,q)$ являются n инволютивными первыми интегралами гамильтониана H.*

Действительно, лагранжевы многообразия Λ_Q с производящей функцией $u(Q,\,\cdot)$, $\Lambda_Q = \{(p,\,q)\,|\,p = \partial u(Q,\,q)/\partial q\}$, суть слои лагранжева расслоения над пространством параметров Q. Уравнение Гамильтона–Якоби означает, что ограничение H на Λ_Q равно h, т. е. что гамильтониан системы — функция от Q.

Успех в применении теоремы Якоби всегда связан с удачным выбором системы координат, в которой происходит разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Именно таким способом Якоби проинтегрировал уравнение геодезических на трехосном эллипсоиде. Говорят, что в уравнении $H\Big(\dfrac{\partial u}{\partial q}, q\Big) = h$ переменная q_1 отделяется, если $\dfrac{\partial u}{\partial q_1}$ и q_1 входят в H лишь в виде комбинации $\varphi\Big(\dfrac{\partial u}{\partial q_1}, q_1\Big)$. Тогда, пытаясь найти решение в виде $u = u_1(q_1) + U(q_2, \ldots, q_n)$, придем к системе $\varphi\Big(\dfrac{\partial u_1}{\partial q_1}, q_1\Big) = \lambda_1$, $H\Big(\lambda_1, \dfrac{\partial u}{\partial q_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial q_n}, q_2, \ldots, q_n\Big) = h$. Если во втором уравнении переменные снова разделяются и т. д., то в конце мы придем к решению исходного уравнения вида

$$u_1(q_1, \lambda_1) + u_2(q_2, \lambda_1, \lambda_2) + \ldots + u_n(q_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, h)$$

и сможем применить теорему Якоби.

Проиллюстрируем этот подход на примере задачи Эйлера о притяжении точки на плоскости двумя неподвижными центрами. Пусть r_1, r_2 — расстояние от движущейся точки до центров Q_1, Q_2 (рис. 31). Гамильтониан задачи имеет вид

$$\frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2} - k\Big(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big).$$

Перейдем к эллиптическим координатам (ξ, η) на плоскости: $\xi = r_1 + r_2$, $\eta = r_1 - r_2$. Линии уровней функции ξ, η — ортогональные друг другу семейства кривых — эллипсов и гипербол с фокусами O_1, O_2. В канонических координатах $(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta)$ на $T^*\mathbb{R}^2$ гамильтониан (после некоторых вычислений) примет вид:

$$H = 2p_\xi^2\frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2} + 2p_\eta^2\frac{4c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} - \frac{4k\xi}{\xi^2 - \eta^2}.$$

В уравнении Гамильтона–Якоби

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big)^2(\xi^2 - 4c^2) + \Big(\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big)(4c^2 - \eta^2) = h(\xi^2 - \eta^2) + 2k\xi$$

мы можем разделить переменные, полагая

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2(\xi^2 - 4c^2) - 2k\xi - h\xi^2 = \lambda,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2(4c^2 - \eta^2) + h\eta^2 = -\lambda.$$

Отсюда находим двупараметрическое семейство решений уравнения Гамильтона–Якоби в виде

$$u(h,\, \lambda,\, \xi,\, \eta) = \int \sqrt{\frac{\lambda + h\xi^2 + 2k\xi}{\xi^2 - 4c^2}}d\xi + \int \sqrt{\frac{-\lambda - h\eta^2}{4c^2 - \eta^2}}d\eta.$$

Стремление извлечь из подобного рода формул явные выражения для траекторий гамильтоновых систем привело Якоби к проблеме обращения гиперэллиптических интегралов, успешное решение которой составляет сегодня одно из лучших достижений алгебраической геометрии.

Глава 5

Лагранжевы и лежандровы особенности

В этом разделе изложены основы математической теории каустик и волновых фронтов. Классификация их особенностей связана с классификацией правильных многогранников. В доказательства вносят вклад теория критических точек функций, группы, порожденные отражениями, группы и алгебры Ли. Возможно, это объясняет, почему элементарные по форме конечные результаты не были получены еще в прошлом веке.

§ 1. Лагранжевы и лежандровы отображения

Так называются конструкции, формализующие на языке симплектической геометрии понятия каустики и волнового фронта геометрической оптики.

1.1. Фронты и лежандровы отображения. *Лежандровым отображением* называется диаграмма, состоящая из вложения гладкого многообразия в пространство лежандрова расслоения в качестве лежандрова подмногообразия и проектирования пространства лежандрова расслоения на базу. Допуская вольность речи, мы будем называть лежандровым отображением композицию этих отображений. Образ лежандрова отображения называется его *фронтом.*

Пример 1. *Нормальным отображением* называется отображение, сопоставляющее каждой точке ориентированной гиперповерхности в евклидовом пространстве конец единичного вектора нормали в этой точке. Образ нормального отображения называется эквидистантой (ср. п. 3.3, гл. 4). Более общо, пусть B — риманово многообразие, $X \subset B$ — гладкое подмногообразие. Поток контактного гамильтониана $H = \|p\|$ в контактном пространстве ST^*B трансверсально ориентированных контактных элементов переводит (за время t) лежандрово подмногообразие Λ_0 таких элементов, касательных к X в лежандрово подмногообразие Λ_t. Проекция Λ_t на базу B есть эквидистанта подмногообразия X — множество концов отрезков геодезических (экстремалей лагранжиана $\|p\|$) длины t, выпущенных из X по нормали. Таким образом, нормальное отображение — лежандрово, эквидистанта является его фронтом.

Пример 2. Проективная двойственность. *Тангенциальным отображением* называется отображение, сопоставляющее каждой точке гиперповерхности в проективном пространстве гиперплоскость, касательную в этой точке. Рассмотрим в произведении $\mathbf{P} \times \mathbf{P}^*$ проективного пространства и двойственного к нему подмногообразие F пар (p, p^*), удовлетворяющих условию инцидентности: точка $p \in \mathbf{P}$ лежит в гиперплоскости $p^* \subset \mathbf{P}$, а также подмногообразие F^*, выделяемое двойственным условием: точка $p^* \in \mathbf{P}^*$ лежит в гиперплоскости $p \subset \mathbf{P}^*$.

1° Два условия инцидентности совпадают: $F^* = F$.

Проекция $F \to \mathbf{P}$ $(F^* \to \mathbf{P}^*)$ является лежандровым расслоением многообразия контактных элементов $F = PT^*\mathbf{P}$ $(F^* = PT^*\mathbf{P}^*$ соответственно).

2° Две контактные структуры в $F = F^*$ совпадают.

Это следует из 1° и определения контактной структуры в PT^*B.

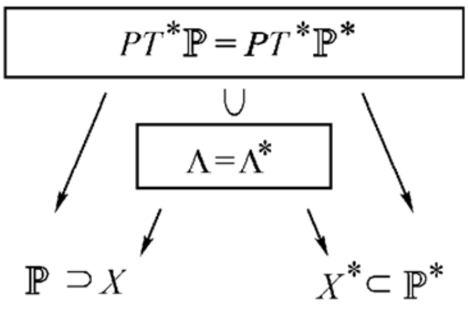


Рис. 32

Тангенциальное отображение — это проекция лежандрова подмногообразия Λ в $PT^*\mathbf{P}$, образованного контактными элементами подмногообразия X в $\mathbf{P}$, на базу второго лежандрова расслоения $PT^*\mathbf{P}^* \to \mathbf{P}^*$. Поэтому тангенциальное отображение гладкой гиперповерхности лежандрово. Его фронт X^* в $\mathbf{P}^*$ называется *двойственной гиперповерхностью.*

3° Лежандровы подмногообразия Λ и Λ^* совпадают (рис. 32).

Действительно, лежандрово многообразие определяется своей проекцией на базу лежандрова расслоения.

Следствие. $(X^*)^* = X$.

Пример 3. *Преобразование Лежандра.* Рассмотрим два лежандровых расслоения стандартного контактного пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$ 1-струй функций в $\mathbb{R}^n$: $(u, p, q) \mapsto (u, q)$ и $(u, p, q) \mapsto (pq - u, p)$.

Проекция 1-графика функции $u = S(q)$ на базу второго расслоения задает лежандрово отображение $(u, q) \mapsto (pq - S(q), \partial S/dq)$. В случае, когда функция S выпукла, его фронт снова является графиком выпуклой функции $v = S^*(p)$ — преобразованием Лежандра функции S (ср. п. 1.2, гл. 3).

Фронты лежандровых отображений, вообще говоря, не являются гладкими. Задача классификации особенностей фронтов сводится к изучению лежандровых особенностей (т. е. особенностей лежандровых отображений). Лежандровы особенности общего положения отличаются от особенностей общих отображений n-мерных многообразий в $(n+1)$-мерные. Так, проекция общей пространственной кривой на плоскость имеет своими особенностями лишь точки самопересечения, в то время как проекция общей лежандровой кривой в лежандровом расслоении имеет еще точки возврата.

Лежандровой эквивалентностью двух лежандровых отображений называется контактоморфизм соответствующих лежандровых расслоений, переводящий лежандрово многообразие первого лежандрова отображения в лежандрово многообразие второго.

Замечание 1. Контактоморфизм лежандровых расслоений однозначно определяется диффеоморфизмом баз. Гладкий фронт лежандрова отображения однозначно определяет исходное лежандрово подмногообразие. В этом смысле действие лежандровой эквивалентности сводится к действию диффеоморфизма базы на фронт. Это замечание применимо и к тем особым фронтам, у которых множество точек регулярности плотно в исходном лежандровом многообразии. Последнее условие нарушается лишь для ростков лежандровых отображений, образующих множество коразмерности бесконечность в пространстве всех ростков.

Замечание 2. Можно показать, что все (с точностью до эквивалентности) лежандровы особенности реализуются уже в случае эквидистант гиперповерхностей в евклидовом пространстве. В этом смысле исследование лежандровых особенностей совпадает с исследованием эквидистант (можно показать, что близким лежандровым особенностям соответствуют эквидистанты близких гиперповерхностей и обратно, так что особенности общего положения для фронтов лежандровых отображений — те же, что для эквидистант). То же самое можно утверждать об особенностях гиперповерхностей, проективно двойственных гладким, или об особенностях преобразований Лежандра графиков гладких функций.

1.2. Производящие семейства гиперповерхностей. Неособое лежандрово отображение определяется своим фронтом — *производящей гиперповерхностью* лежандрова многообразия. Произвольное лежандрово отображение можно задавать производящим семейством гиперповерхностей. Рассмотрим вспомогательное тривиальное расслоение $\mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ «большого пространства» $\mathbb{R}^{k+l}$ над базой $\mathbb{R}^l$. Контактные элементы в $\mathbb{R}^{k+l}$, касательные к слоям расслоения, образуют смешанное подмногообразие $P \subset PT^*\mathbb{R}^{k+l}$ коразмерности k. Смешанное многообразие расслаивается над многообразием контактных элементов базы (рис. 33). Лежандрово подмногообразие в $PT^*\mathbb{R}^{k+l}$ называется правильным, если оно трансверсально смешанному пространству P.

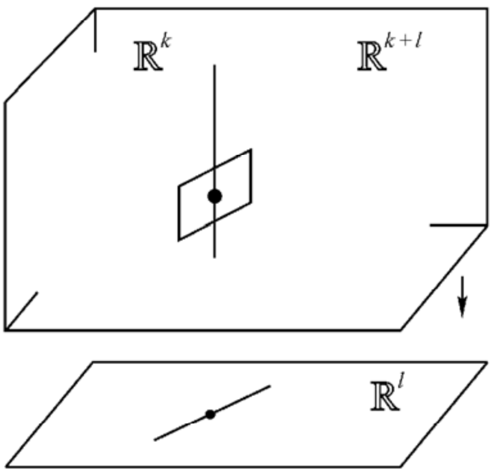


Рис. 33

Лемма 1. *Образ проекции пересечения правильного лежандрова многообразия со смешанным пространством P в пространство контактных элементов базы является иммерсированным лежандровым подмногообразием.*

Лемма 2. *Всякий росток лежандрова подмногообразия в $PT^*\mathbb{R}^l$ получается этой конструкцией из некоторого порожденного производящей гиперповерхностью правильного лежандрова подмногообразия подходящего вспомогательного расслоения.*

Приведем доказательство второго утверждения леммы. Введем в расслоении $PT^*\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ такие контактные координаты Дарбу $(u, p, q) = (u, p_I, p_J, q_I, q_J)$, $I \cup J = \{1, \ldots, l-1\}$, $I \cap J \neq \varnothing$, чтобы исследуемый росток лежандрова подмногообразия однозначно проектировался на пространство координат (p_J, q_I) вдоль (u, p_I, q_J)-пространства. Тогда из соотношения $du = p\,dq = d(p_J q_J) - q_J\,dp_J + p_I\,dq_I$ получим: существует такой росток гладкой функции $S(p_J, q_I)$, что наше лежандрово подмногообразие задается уравнениями

$$p_I = \frac{\partial S}{\partial q_I}, \quad q_J = -\frac{\partial S}{\partial p_J}, \quad u = p_J q_J + S(p_J, q_I).$$

Рассмотрим теперь гиперповерхность $u = F(x, q)$ в «большом» пространстве $\mathbb{R}^{k+l}$, где $k = |J|$, а $F(x, q) = xq_J + S(x, q_I)$, как производящую гиперповерхность лежандрова многообразия $u = F$, $y = F_x$,

$p = F_q$. Применение конструкции первой части леммы приводит к исходному лежандрову ростку в $PT^*\mathbb{R}^l$. Условие правильности имеет вид $\det(\overline{F_{xqI}}) \neq 0$ и выполнено.

Гиперповерхность большого пространства, через которую росток лежандрова отображения задается описанной в лемме конструкцией, называется *производящим семейством гиперповерхностей* этого лежандрова отображения (элементы семейства, вообще говоря, — особые пересечения гиперповерхности со слоями расслоения $\mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$).

Замечание. «Физический смысл» производящего семейства состоит в следующем. Рассмотрим распространение света в $\mathbb{R}^l$ от источника $X \subset \mathbb{R}^l$ размерности k. Согласно принципу Гюйгенса (C. Huygens), каждая точка x источника излучает сферическую волну. Обозначим через $F(x, q)$ время распространения этой волны до точки q пространства $\mathbb{R}^l$. Тогда условие, что наименьшее время движения света от источника X до точки q равно u, дает уравнения

$$\exists x \in X : u = F(x, q), \qquad \frac{\partial F(x, q)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Это и есть уравнение фронта для проекции в $\mathbb{R}^l$ пересечения лежандрова многообразия $\{u = F,\ y = F_x,\ p = F_q\}$ со смешанным пространством $\{y = 0\}$.

Расслоенной эквивалентностью производящих семейств гиперповерхностей Γ_1 и Γ_2 в пространстве расслоения $\mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ называется расслоенный диффеоморфизм $(x, q) \mapsto (h(x, q), \varphi(q))$, переводящий Γ_1 в Γ_2. Пусть $\Gamma \subset M$ — гладкая гиперповерхность с простым уравнением $f = 0$. Удвоением M с ветвлением вдоль Γ называется гиперповерхность в прямом произведении $\mathbb{R} \times M$ с уравнением $u^2 = f(v)$, $u \in \mathbb{R}$. В комплексном случае удвоение — разветвленное вдоль Γ двулистное накрытие M. Вещественный тип удвоения зависит от выбора стороны Γ. Два семейства гиперповерхностей во вспомогательных расслоениях с общей базой называются стабильно расслоенно эквивалентными, если из них послойными удвоениями получаются расслоенно эквивалентные семейства.

Теорема [6]. *Два ростка производящих семейств гиперповерхностей задают эквивалентные ростки лежандровых отображений, если и только если эти семейства гиперповерхностей расслоенно стабильно эквивалентны.*

Причина появления здесь стабильной эквивалентности станет ясна в § 2.

1.3. Каустики и лагранжевы отображения. *Лагранжевым отображением* называется диаграмма, состоящая из вложения гладкого многообразия в качестве лагранжева подмногообразия в пространство лагранжева расслоения и проекции на базу этого расслоения.

Пример 1. *Градиентное отображение* $q \mapsto \dfrac{\partial S}{\partial q}$ лагранжево.

Пример 2. Гауссово отображение трансверсально ориентированной гиперповерхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в единичную сферу лагранжево. Действительно, оно является композицией двух отображений. Первое сопоставляет точке гиперповерхности ориентированную нормаль к гиперповерхности в этой точке; его образ — лагранжево подмногообразие в пространстве всех прямых в $\mathbb{R}^n$, изоморфном (ко)касательному расслоению сферы (рис. 34). Второе — это лагранжево проектирование $T^*S^{n-1} \to \mathbf{S}^{n-1}$.

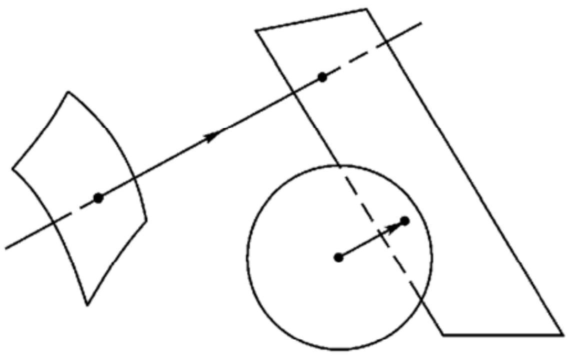


Рис. 34

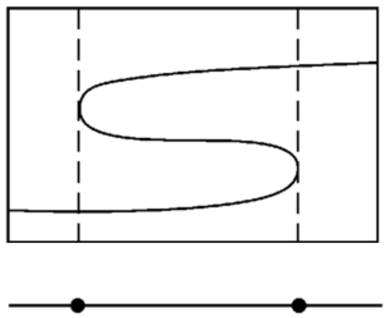


Рис. 35

Пример 3. *Нормальное отображение,* сопоставляющее вектору $\overrightarrow{uv}$ нормали к подмногообразию в евклидовом пространстве, приложенному в точке u, точку v самого пространства, лагранжево.

Множество критических значений лагранжева отображения называется *каустикой* (рис. 35).

Пример 4. Каустика нормального отображения подмногообразия в евклидовом пространстве есть множество его центров кривизны: чтобы построить каустику, нужно вдоль каждой нормали отложить соответствующие радиусы главных кривизн.

Лагранжевой эквивалентностью лагранжевых отображений называется симплектоморфизм лагранжевых расслоений, переводящий лагранжево многообразие первого отображения в лагранжево многообразие второго.

Замечание 1. Автоморфизм лагранжева расслоения $T^*M \to M$ разлагается в произведение автоморфизма, индуцированного диффеоморфизмом базы, и автоморфизма сдвига $(p, q) \mapsto (p+\varphi(q), q)$, где φ — замкнутая 1-форма на M.

Замечание 2. Каустики эквивалентных лагранжевых отображений диффеоморфны. Обратное, вообще говоря, не верно.

Замечание 3. Каждый росток лагранжева отображения эквивалентен ростку градиентного (гауссова, нормального) отображения. Все ростки лагранжевых отображений, близкие к данному градиентному (гауссову, нормальному), сами являются градиентными (гауссовыми, нормальными). Поэтому локальные явления общего положения в этих классах лагранжевых отображений те же, что и в классе всех лагранжевых отображений.

1.4. Производящие семейства функций. Лагранжево сечение кокасательного расслоения, т. е. замкнутая 1-форма на базе, задается своей производящей функцией — потенциалом этой 1-формы. Рассмотрим вспомогательное расслоение $\mathbb{R}^{k+l} \to R^l$. Ковекторы из $T^*\mathbb{R}^{k+l}$, обращающиеся в нуль на касательном пространстве к слою в точке своего проложения, образуют смешанное подмногообразие $Q \subset T^*\mathbb{R}^{k+l}$. Смешанное многообразие расслаивается над $T^*\mathbb{R}^l$ с k-мерными изотропными слоями. Лагранжево подмногообразие в $T^*\mathbb{R}^{k+l}$, трансверсальное Q, называется правильным. Проекция в $T^*\mathbb{R}^l$ пересечения $\Lambda \cap Q$ правильного лагранжева многообразия является иммерсированным лагранжевым подмногообразием в $T^*\mathbb{R}^l$. Обратно, любой росток лагранжева подмногообразия в $T^*\mathbb{R}^l$ может быть получен проекцией пересечения со смешанным подмногообразием Q правильного лагранжева подмногообразия Λ, являющегося сечением кокасательного расслоения «большого» пространства, при подходящем выборе вспомогательного расслоения.

Производящим семейством функций ростка лагранжева отображения называется росток функции на «большом» пространстве, который производит правильное лагранжево сечение кокасательного расслоения «большого» пространства и посредством описанной выше конструкции определяет данное лагранжево отображение. (Функция на $\mathbb{R}^{k+l}$ рассматривается здесь как семейство функций на слоях проекции $\mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$, зависящих от точки базы как от параметра.)

В координатах Дарбу (p_I, p_J, q_I, q_J) для лагранжева расслоения $T^*\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ таких, что лагранжево подмногообразие в $T^*\mathbb{R}^l$ не особо проектируется вдоль (p_I, q_J)-пространства, зададим это подмногообразие уравнениями $p_I = \partial S/\partial q_I$, $q_J = -\partial S/\partial p_J$, где $S(p_J, q_I)$ некоторая гладкая функция. Тогда семейство функций $F(x, q) = xq_J + S(p_J, q_I)$ можно взять в качестве производящего семейства лагранжева отображения нашего лагранжева подмногообразия в $T^*\mathbb{R}^l$ на базу $\mathbb{R}^l$.

В общем случае семейство функций $F(x, q)$ является производящим для некоторого лагранжева отображения, если и только если $rk(F_{xx}, F_{xq}) = k$. В этом случае оно определяет

а) правильное лагранжево подмногообразие Λ в $T^*\mathbb{R}^{k+l}$:

$$\Lambda = \{(y, p, x, q) \,|\, y = F_x,\ p = F_q\};$$

б) пересечение Λ со смешанным пространством $Q = \{y = 0\}$:

$$\Lambda \cap Q = \{(p, x, q) \,|\, F_x = 0, p = F_q\};$$

в) лагранжево многообразие $L \subset T^*\mathbb{R}^l$ — проекцию $\Lambda \cap Q$:

$$L = \{(p, q) \,|\, \exists x\colon F_x(x, q) = 0,\ p = F_q(x, q)\};$$

г) каустику K в $\mathbb{R}^l$:

$$K = \{q \,|\, \exists x\colon F_x(x, q) = 0,\ \det|F_{xx}(x, q)| = 0\}. \tag{2}$$

Назовем два семейства функций $F_1(x, q)$, $F_2(x, q)$ расслоенно R_+-эквивалентными, если существует такой расслоенный диффеоморфизм $(x, q) \mapsto (h(x, q), \varphi(q))$ и такая гладкая функция $\Psi(q)$ на базе, что $F_2(x, q) = F_1(h(x, q), \varphi(q)) + \Psi(q)$. Два семейства функций $F_1(x_1, q)$, $F_2(x_2, q)$ от различного, вообще говоря, числа переменных назовем стабильно расслоенно R_+-эквивалентными, если они становятся расслоенно R_+-эквивалентными после прибавления к ним невырожденных квадратичных форм $Q_1(z_1)$, $Q_2(z_2)$ от новых переменных

$$F_1(x_1, q) + Q_1(z_1) \overset{R_+}{\sim} F_2(x_2, q) + Q_2(z_2).$$

Пример. Семейство $x^3 + yz + qx$ (q — параметр) стабильно расслоенно R_+-эквивалентно семейству $x^3 + qx$.

Теорема [6]. *Два ростка лагранжевых отображений лагранжево эквивалентны, если и только если ростки их производящих семейств стабильно расслоенно R_+-эквивалентны.*

1.5. Резюме. Исследование особенностей каустик и волновых фронтов свелось к изучению производящих семейств функций и гиперповерхностей. Формулы (1) и (2) означают, что фронт производящего семейства гиперповерхностей состоит из тех точек пространства параметров, для которых гиперповерхность семейства особа, а каустика производящего семейства функций состоит из тех точек пространства параметров, для которых функция семейства имеет вырожденные критические точки, т. е. такие точки, в которых дифференциал функции обращается нуль, а квадратичная форма второго дифференциала вырождена.

Все определения и результаты этого параграфа дословно переносятся на голоморфный или вещественно-аналитический случай.

§ 2. Классификация критических точек функций

Рассматриваемая ниже теория деформаций ростков функций и гиперповерхностей в принципе аналогична конечномерной теории деформаций, развитой в § 3 главы 1 для квадратичных гамильтонианов.

2.1. Версальные деформации: неформальное описание. Производящее семейство гиперповерхностей лежандрова отображения является семейством нулевых уровней некоторого семейства гладких функций. Семейство функций мы рассматриваем как отображение (конечномерной) базы семейства в бесконечномерное пространство гладких функций. Функции с особым нулевым уровнем образуют множество коразмерности один в этом пространстве. Фронт лежандрова отображения — это прообраз множества таких функций в базе производящего семейства (рис. 36). Производящее семейство функций лагранжева отображения вычитанием семейства констант (это R_+-эквивалентность!) превращается в семейство функций, равных нулю в начале координат. Поэтому лагранжево отображение можно задавать отображением базы в пространство таких функций. Функции с вырожденными критическими точками образуют множество коразмерности один в этом пространстве. Прообраз этого множества в базе — каустика производимого семейством лагранжева отображения.

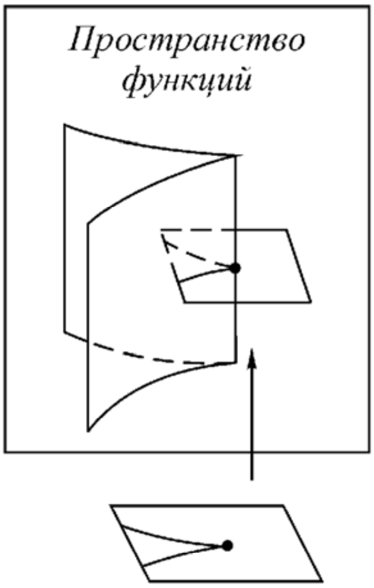


Рис. 36

Наша дальнейшая программа такова. Мы будем называть росток лагранжева (лежандрова) отображения устойчивым, если все близкие ростки лагранжевых (лежандровых) отображений ему эквивалентны. На языке производящих семейств это означает, что ростки, близкие к данному производящему семейству, расслоенно эквивалентны ему. Расслоенная эквивалентность — это эквивалентность семейств точек функционального пространства относительно действия в нем подходящей (псевдо)группы (см. п. 3.1, гл. 1). Мы получаем следующий результат: росток в точке лагранжева (лежандрова) отображения устойчив тогда и только тогда, когда росток его производящего семейства в этой точке версален относительно эквивалентности в соответствующем функциональном пространстве[1].

Далее мы приведем результаты по классификации ростков функций и увидим, что начальная часть этой классификации дискретна. Это означает, что почти все пространство функций заполнено конечным числом орбит (рис. 37), а непрерывные семейства орбит образуют в пространстве функций множество положительной коразмерности l. Поскольку семейства функции общего положения, рассматриваемые как отображения базы а функциональное пространство, трансверсальны этому множеству и каждой орбите из конечного списка, мы получим для лагранжевых и лежандровых отображений такие следствия: росток лагранжева (лежандрова) отображения общего положения с базой размерности меньше $l = 6$ (соответственно 7) устойчив и эквивалентен одному из ростков конечного списка.

Наконец, изучив миниверсальные деформации представителей конечного числа орбит, мы получим явное с точностью до диффеоморфизма описание особенностей каустик (волновых фронтов) в пространствах менее $l = 6$ (соответственно 7) измерений.

[1]Определение (мини)версальной деформации см. в п. 3.1 главы 1.

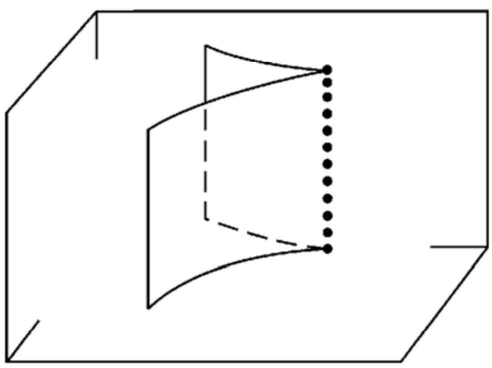


Рис. 37

2.2. Критические точки функций. Нам понадобятся следующие отношения эквивалентности в пространстве ростков в нуле голоморфных (гладких) функции в $\mathbb{C}^n$ (соответственно в $\mathbb{R}^n$).

R-эквивалентные ростки переводятся друг в друга ростком в нуле диффеоморфизма, пространства — прообраза;

R_+-эквивалентные ростки становятся R-эквивалентными после сложения одного из них с подходящей константой;

V-эквивалентные ростки становятся R-эквивалентными после умножения одного из них на росток не обращающейся в нуль функции (V-эквивалентность ростков функций — это эквивалентность ростков гиперповерхностей их нулевых уровней).

В критической (или особой) точке функции ее дифференциал обращается в нуль. Критическая точка невырождена, если такова квадратичная форма второго дифференциала функции в этой точке. По лемме Морса [6] функция в окрестности невырожденной критической точки R-эквивалентна функции $\pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_n^2 + \mathrm{const}$. Корангом критической точки называется коранг второго дифференциала функции в этой точке.

Лемма Морса с параметрами [6]. *Росток функции в критической точке коранга r R-эквивалентен ростку в нуле функции вида*

$$\mathrm{const} + \varphi(x_1, \ldots, x_r) \pm x_{r+1}^2 \pm \ldots \pm x_n^2,$$

где $\varphi = O(|x|^3)$.

Эта лемма объясняет появление понятия стабильной эквивалентности в теоремах о производящих семействах: в действительности росток в точке лагранжева (лежандрова) отображения можно задавать ростком производящего семейства с нулевым вторым дифференциалом функции в этой точке. Расслоенная эквивалентность минимальных в этом смысле производящих семейств равносильна эквивалентности исходных отображений. Для построения минимальных производящих семейств нужно лишь в конструкциях пп. 1.2, 1.4 выбрать минимальным число «патологических» переменных p_s.

Ростки функций (возможно, разного числа переменных) называются стабильно $R(R_+, V)$-эквивалентными, если они $R(R_+, V)$-эквивалентны суммам одного и того же ростка ранга нуль с невырожденными квадратичными формами от подходящего числа дополнительных переменных.

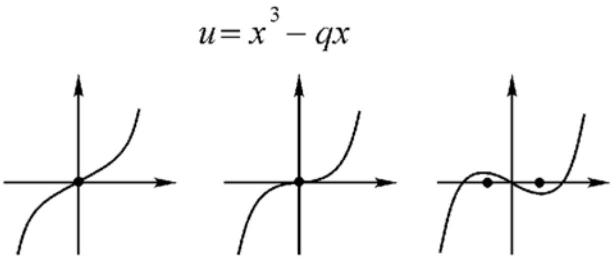


Рис. 38

Вырожденная критическая точка распадается на невырожденные при деформации (рис. 38). Если количество последних конечно при любой малой деформации, то критическая точка называется конечно кратной. Росток функции в конечно кратной критической точке R-эквивалентен своему полиному Тейлора достаточно высокого порядка. В голоморфном случае конечнократность равносильна изолированности критической точки. Число невырожденных, на которые такая точка распадается при деформации, не зависит от деформации и называется кратностью или числом Милнора (J. Milnor) μ критической точки. Бесконечнократные ростки образуют в пространстве ростков функций множество бесконечной коразмерности.

2.3. Простые особенности. Росток функции в критической точке называется простым, если его окрестность в пространстве ростков функции в этой точке покрывается конечным числом классов эквивалентности. Понятие простоты, вообще говоря, зависит от отношения эквивалентности и применимо к любому действию группы Ли на многообразии. Число параметров (модулей), необходимых для параметризации орбит в окрестности данной точки многообразия, называется модальностью точки. Примеры: модальность любого квадратичного гамильтониана в $\mathbb{R}^{2n}$ относительно действия симплектической группы равна n; критическое значение является модулем относительно R-эквивалентности в пространстве ростков функций в данной точке, но не является модулем для R_+-эквивалентности в этом пространстве.

Теорема [6]. *Росток функции в критической точке, простой в пространстве ростков гладких функций (с нулевым значением в этой точке), стабильно R_+ (соответственно R, V)-эквивалентен одному из следующих ростков в нуле*

$$A_\mu^\pm,\ \mu \geqslant 1\colon f(x) = \pm x^{\mu+1} \quad D_\mu^\pm,\ \mu \geqslant 4\colon f(x, y) = x^2 y \pm y^{\mu-1};$$

$$E_6^{\pm}: f(x,\, y) = x^3 \pm y^4; \quad E_7^{\pm}: f(x,\, y) = x^3 + xy^3;$$
$$E_8^{\pm}: f(x,\, y) = x^3 + y^5.$$

Непростые ростки образуют множество коразмерности 6 *в этих пространствах.*

Замечание 1. Индекс μ равен кратности критической точки.

Замечание 2. Перечисленные ростки попарно стабильно неэквивалентны, кроме следующих случаев: $A_{2k}^{+}\overset{R}{\sim} A_{2k}^{-}$, $A_{\mu}^{+}\overset{V}{\sim} A_{\mu}^{-}$, $D_{\mu}^{+}\overset{V}{\sim} D_{\mu}^{-}$, $E_{6}^{+}\overset{V}{\sim} E_{6}^{-}$, $A_{1}^{+}\overset{R}{\sim} A_{1}^{-}$ (стабильно).

Замечание 3. В голоморфном случае ростки, различающиеся лишь знаком $\pm$, эквивалентны между собой. На рис. 39 изображены примыкания простых классов и окаймляющих их унимодальных классов в пространстве функций.

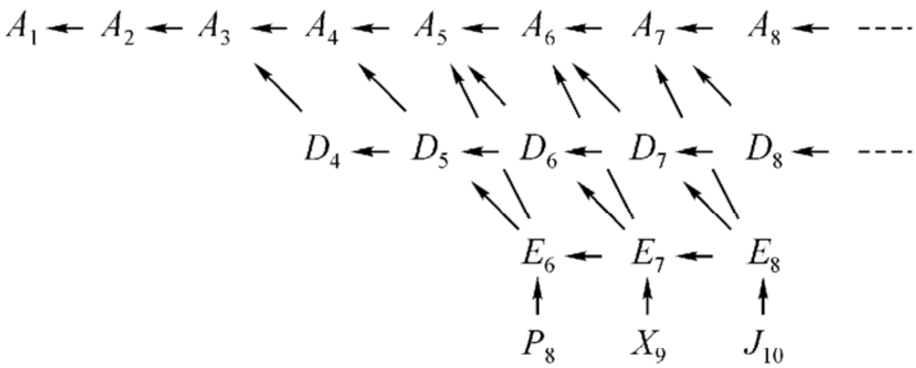


Рис. 39

2.4. Платоновы тела. Список особенностей A_μ, D_μ, E_μ в ином контексте был известен еще в прошлом веке. Рассмотрим конечные подгруппы в группе $\mathbf{SU}_2$. Их можно описать как бинарные подгруппы правильных многоугольников, диэдров (правильных многоугольников в пространстве), тетраэдра, куба к икосаэдра. Определение бинарной группы состоит в следующем. Группа $\mathbf{SU}_2$ эпиморфно отображается на группу вращении $\mathbf{SO}_3$ с ядром $\{\pm 1\}$. Группа вращении правильного многогранника в пространстве — конечная подгруппа в $\mathbf{SO}_3$. Прообраз этой группы в $\mathbf{SU}_2$ и есть бинарная группа многогранника. Правильному n-угольнику по определению соответствует циклическая подгруппа порядка n в $\mathbf{SU}_2$.

Конечная подгруппа $\Gamma \subset \mathbf{SU}_2$ действует (вместе с $\mathbf{SU}_2$) на плоскости $\mathbb{C}^2$. Фактор-пространство $\mathbb{C}^2/\Gamma$ — алгебраическая поверхность с одной особой точкой. Алгебра Γ-инвариантных полиномов на $\mathbb{C}^2$ имеет три образующих x, y, z. Они зависимы. Соотношение $f(x, y, z) = 0$ между ними — это уравнение поверхности $\mathbb{C}^2/\Gamma$ в $\mathbb{C}^3$. Например, в случае циклической подгруппы Γ порядка n, порожденной унитарным преобразованием плоскости $(u, v) \mapsto (e^{2\pi i/n}u, e^{-2\pi i/n}v)$, алгебра инвариантов порождена мономами $x = uv$, $y = u^n$, $z = v^n$ с соотношением $x^n = yz$.

Теорема [52]. *Все поверхности $\mathbb{C}^2/\Gamma$ для конечных подгрупп $\Gamma \subset \mathbf{SU}_2$ имеют особенности типов A_μ (для многоугольников), D_μ (для диэдров), E_6, E_7, E_8 (для тетраэдра, куба и икосаэдра соответственно).*

2.5. Миниверсальные деформации. В теории деформаций ростков функций удается доказать теорему версальности [6]: конечнократные ростки имеют версальные деформации (с конечным числом параметров).

R-миниверсальная деформация конечнократного ростка (относительно псевдогруппы локальных замен независимых переменных) может быть построена следующим образом. Рассмотрим росток функции f в критической точке 0 кратности μ. Пусть $f(0) = 0$.

1) Касательное пространство к орбите ростка f — это его градиентный идеал $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, состоящий из всех ростков функций вида $\sum h_i(x)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ($h\dfrac{\partial}{\partial x}$ — росток в нуле векторного поля, не обязательно равного нулю в начале координат).

2) Фактор-алгебра $Q = \mathbb{R}\{x\}/\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ алгебры всех ростков функций в нуле по градиентному идеалу имеет размерность μ (и называется локальной алгеброй ростка f; ее можно представлять себе, как алгебру функций на множестве $\{x \mid \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0\}$ из μ критических точек функции f, слившихся в точке 0).

3) Пусть $e_0(x) = 1, e_1(x), \ldots, e_{\mu-1}(x)$ — функции (например — мономы), представляющие базис пространства Q. Тогда деформация

$$F(x, q) = f(x) + q_{\mu-1}e_{\mu-1}(x) + \ldots + q_1e_1(x) + q_0$$

R-миниверсальна для ростка f (F — трансверсаль к касательному пространству орбиты ростка f).

4) Отбрасывание свободного члена q_0 дает R_+-миниверсальную деформацию ростка f.

5) Аналогичная конструкция для локальной алгебры $Q = \mathbb{R}\{x\}/(f, f_x)$ дает V-миниверсальную деформацию ростка f ($hf_x + \varphi f$ — общий вид касательного вектора к классу уравнений диффеоморфных гиперповерхностей).

Простые ростки A_μ, D_μ, E_μ лежат в своем градиентном идеале: $f \in (f_x)$. Действительно, нормальные формы теоремы п. 2.3 квазиоднородны (т. е. однородны степени 1 после выбора положительных дробных степеней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ для переменных $x_1, \ldots, x_n$; пример: функция $x^2y + y^{\mu-1}$ квазиоднородна с весами $\alpha_x = (\mu-2)/(2\mu-2)$, $\alpha_y = 1/(\mu-1)$). Поэтому $f = \sum \alpha_i x_i \partial f/\partial x_i$. Отсюда вытекает, что R-миниверсальные деформации простых ростков функций V-миниверсальны.

Пример. $F(x, q) = x^{\mu+1} + q_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + q_1 x$ — R_+-миниверсальная деформация ростка A_μ, а $F(x, q) + q_0$ — его V-миниверсальная деформация: действительно $\{1, x, \ldots, x^{\mu-1}\}$ — базис пространства $\mathbb{R}\{x\}/(x^\mu)$. Для нормальных форм п. 2.3 простых особенностей функций мономиальный базис алгебры Q приведен в таблице 1.

Таблица 1

A_μ	$1, x, \ldots, x^{\mu-1}$	E_6	$1, y, x, y^2, xy, xy^2$
D_μ	$1, y, \ldots, y^{\mu-2}, x$	E_7	$1, y, x, y^2, xy, x^2, x^2y$
B_μ	$1, x, \ldots, x^{\mu-1}$	E_8	$1, y, x, y^2, xy, y^3, xy^2, xy^3$
C_μ	$1, y, \ldots, y^{\mu-1}$	F_4	$1, y, x, xy$

§ 3. Особенности волновых фронтов и каустик

Приведены классификационные результаты для особенностей волновых фронтов, каустик и их перестроек во времени. Обсуждаются обобщения теории производящих семейств для фронтов и каустик, возникающих от источника с краем и в задаче об обходе препятствия (ср. гл. 3, п. 1.6).

3.1. Классификация особенностей волновых фронтов и каустик в малых размерностях. Фронтом типа A_μ, D_μ или E_μ называется росток гиперповерхности в μ-мерном пространстве базы V-миниверсальной деформации соответствующего простого ростка функции, точкам которой отвечают функции с особым нулевым уровнем.

Пример. Фронт типа A_μ — это множество многочленов от одной переменной с кратными корнями в пространстве многочленов степени $\mu+1$ с фиксированным старшим коэффициентом и нулевой суммой корней. На рис. 40 изображены фронты A_2 и A_3.

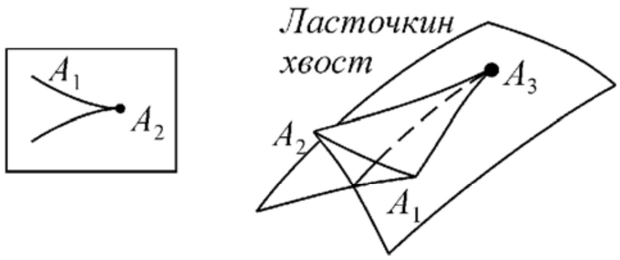


Рис. 40

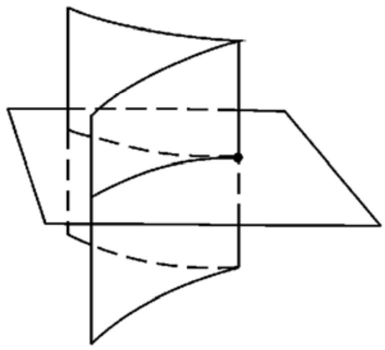


Рис. 41

Теорема. *Волновой фронт общего положения в пространстве $l \leqslant 6$ измерений устойчив и в окрестности любой своей точки диффеоморфен декартову произведению фронта типа A_μ, D_μ, E_μ с $\mu \leqslant l$ на неособое многообразие размерности $l-\mu$ либо объединению таких трансверсальных фронтов* (рис. 41).

Каустикой типа A_μ, $D_\mu^\pm$, $E_\mu^\pm$ называется росток гиперповерхности в $(\mu-1)$-мерном пространстве базы R_+-миниверсальной деформации соответствующего простого ростка функции, точкам которой отвечают функции с вырожденными критическими точками (т.е. проекция ребра возврата A_2 фронта того же имени на базу R_+-миниверсальной деформации).

Пример. Каустика типа A_μ диффеоморфна фронту типа $A_{\mu-1}$: точке этой каустики отвечает многочлен степени $\mu+1$, производная которого (то есть многочлен степени μ) имеет кратный корень.

Теорема. *Каустика общего положения в пространстве $l \leqslant 5$ измерений устойчива и в окрестности любой своей точки диффеоморфна*

декартову произведению каустики типа A_μ, D_μ, E_μ с $\mu-1 \leqslant l$ на неособое многообразие размерности $l-\mu+1$ либо объединению таких трансверсальных каустик. В частности, каустика общего положения в пространстве локально диффеоморфна одной из поверхностей рис. 41, 42.

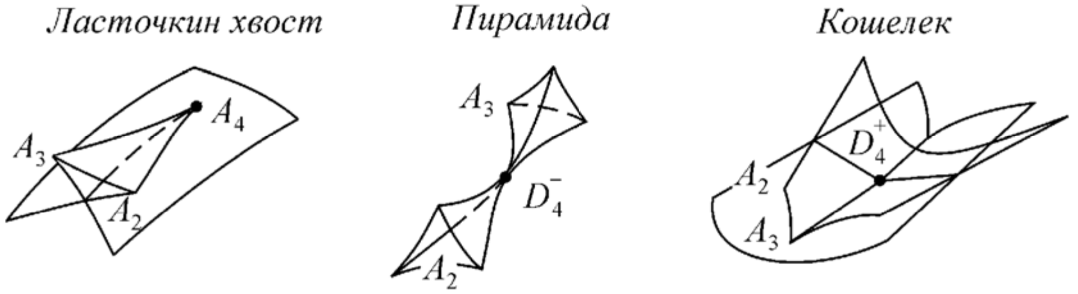


Рис. 42

Фронты и каустики типа A_μ, D_μ, E_μ устойчивы во всех размерностях. Фронты (каустики) общего положения в пространствах размерности $l \geqslant 7$ ($l \geqslant 6$) могут быть неустойчивы[1]. Это связано с наличием непростых особенностей функций, первая из которых — P_8 (см. рис. 39). Имеющаяся классификация унимодальных бимодальных критических точек функций [6] несет значительную информацию об особенностях фронтов (каустик) общего положения в пространствах $l \leqslant 11$ ($l \leqslant 10$) измерений. Тем не менее классификация особенностей каустик общего положения в $\mathbb{R}^6$ хотя бы с точностью до гомеоморфизмов пока отсутствует.

3.2. Краевые особенности. Предположим, что источник излучения — многообразие с краем (например, солнечный диск). В такой ситуации волновой фронт имеет две компоненты — фронт излучения края и фронт от самого источника (рис. 43). Каустика в этом случае имеет, вообще говоря, три компоненты — границы света и тени, тени и полутени, полутени и света.

Рис. 43

Соответствующая теория лагранжевых и лежандровых отображений и их производящих семейств приводит к теории особенностей функции на многообразии с краем. Под краем следует понимать неособую гиперповерхность на

[1]и при $l \geqslant 10$ ($l \geqslant 6$) могут иметь функциональные модули.

многообразии без края. Точка считается особой для функции на многообразии с краем, если она критическая либо для самой функции, либо для ее ограничения на край. От диффеоморфизмов, входящих в определение эквивалентности, требуется чтобы они сохраняли край, (в вещественном случае — каждое полупространство дополнения края). Теория краевых особенностей функций включает в себя обычную, поскольку функции могут иметь особенности и вне края.

Теорема. *Простые ростки функций на многообразии с краем стабильно эквивалентны росткам в нуле (край $x = 0$) либо $\widetilde{A}_\mu^{\pm(\pm)}$, $\widetilde{D}_\mu^{\pm(\pm)}$, $\widetilde{E}_\mu^{\pm(\pm)}$: $\pm x + f(y, z)$, где $f(y, z)$ — росток $A_\mu^\pm$, $D_\mu^\pm$, $E_\mu^\pm$ из п. 2.3 на краю; либо $B_\mu^\pm$, $\mu \geqslant 2$: $\pm x^\mu$; $C_\mu^\pm$, $\mu \geqslant 2$: $xy \pm y^\mu$; $F_4^\pm$: $\pm x^2 + y^3$.*

Замечание 1. Перечисленные ростки попарно неэквивалентны, кроме случаев: $\widetilde{A}_{2k\sim}^{+R}$, $\widetilde{A}_{2k}^{-}$, $C_{2\sim}^{\pm R} B_2^\pm$ (стабильно), а также ростки, различающиеся знаками $\pm$, эквивалентны в голоморфной и V-классификации, кроме случая C_{2k+1}, в котором гиперповерхности $C_{2k+1}^\pm$ вещественно неэквивалентны.

Замечание 2. Роль невырожденных особенностей в краевой теории играют ростки $\widetilde{A}_1$: $\pm x \pm y_1^2 \pm \ldots \pm y_n^2$, A_1: $\pm (x - x_0)^2 \pm y_1^2 + \ldots \pm y_n^2$, так что особенности $\widetilde{A}_\mu$, $\widetilde{D}_\mu$, $\widetilde{E}_\mu$ можно считать стабилизацией особенностей A_μ, D_μ, E_μ на краю.

Замечание 3. Простые особенности вне края — $A_\mu^\pm$, $D_\mu^\pm$, $E_\mu^\pm$.

Замечание 4. Теория краевых особенностей функций эквивалентна теории критических точек четных по переменной u функций на двулистном накрытии $x = u^2$, ветвящемся вдоль края $x = 0$.

Построение миниверсальных деформаций конечнократных краевых особенностей аналогично описанному в п. 2.6 и сводится к нахождению мономиального базиса локальной алгебры

$$\mathbb{R}\{x, y, \ldots, y_n\} \Big/ \left(x \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Для ростков B_μ, C_μ, F_4 такой базис указан в таблице 1. Фронты миниверсальных семейств B_μ и C_μ диффеоморфны между собой и состоят из двух неприводимых гиперповерхностей в пространстве многочленов степени μ с фиксированным старшим коэффициентом множества многочленов с нулевым корнем и множества многочленов с кратным корнем. В случае B_μ первая компонента имеет смысл фронта излучения от края источника ($\widetilde{A}_1$), вторая — фронта от самого источника (A_1), а в случае C_μ все наоборот. Каустики B_μ и C_μ диффеоморфны фронтам $B_{\mu+1}$ и $C_{\mu+1}$. Фронты и каустики ростков $\widetilde{A}_\mu$, $\widetilde{D}_\mu$, $\widetilde{E}_\mu$ — такие же, как у A_μ, D_μ, E_μ. На рис. 44 изображены каустики B_μ, C_μ, F_4 в пространстве и на плоскости.

Теорема. *Росток волнового фронта* (*каустики*) *общего положения от «источника с краем» в пространстве $l \leqslant 4$ ($l \leqslant 3$) измерений устойчив и диффеоморфен декартову произведению фронта* (*каустики*) *миниверсального семейства одного из ростков A_μ, B_μ, C_μ, D_μ, E_μ, F_4 с $\mu \leqslant l$ ($\mu - 1 \leqslant l$) на росток неособого многообразия размерности $l - \mu$ ($l - \mu + 1$) либо объединению таких трансверсальных фронтов* (*каустик*). *Неустойчивые фронты* (*каустики*) *общего положения встречаются в пространствах размерности $l \geqslant 5$ ($l \geqslant 4$).*

Пример [27]. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задана поверхность общего положения с краем. Там, где край касается линии кривизны поверхности, тройка — фокальные точки поверхности (A_2), фокальные точки края (A_2), нормали к поверхности в точках края (B_2) — образует в центре кривизны поверхности каустику F_4.

Симплектическая версия теории каустик от источника с краем приводит к следующему объекту: в пространстве лагранжева расслоения два некасающихся лагранжевых многообразия, пересекающихся по гиперповерхности в каждом из них. Каустика такого объекта состоит из трех частей: каустик обоих лагранжевых многообразий и проекций их пересечения на базу лагранжева расслоения.

Теория производящих семейств таких объектов сводится к теории особенностей функций на многообразии с краем [63]. Перестановке двух лагранжевых многообразий отвечает перестановка классов стабильной эквивалентности самой функции и ее ограничения на край [28]. Эта двойственность обобщает двойственность серий B и C простых краевых особенностей и проясняет классификацию унимодальных и бимодальных критических точек функций на многообразии с краем [20].

3.3. Группы Вейля и простые фронты. Классификация простых ростков функций на многообразии с краем параллельна многим

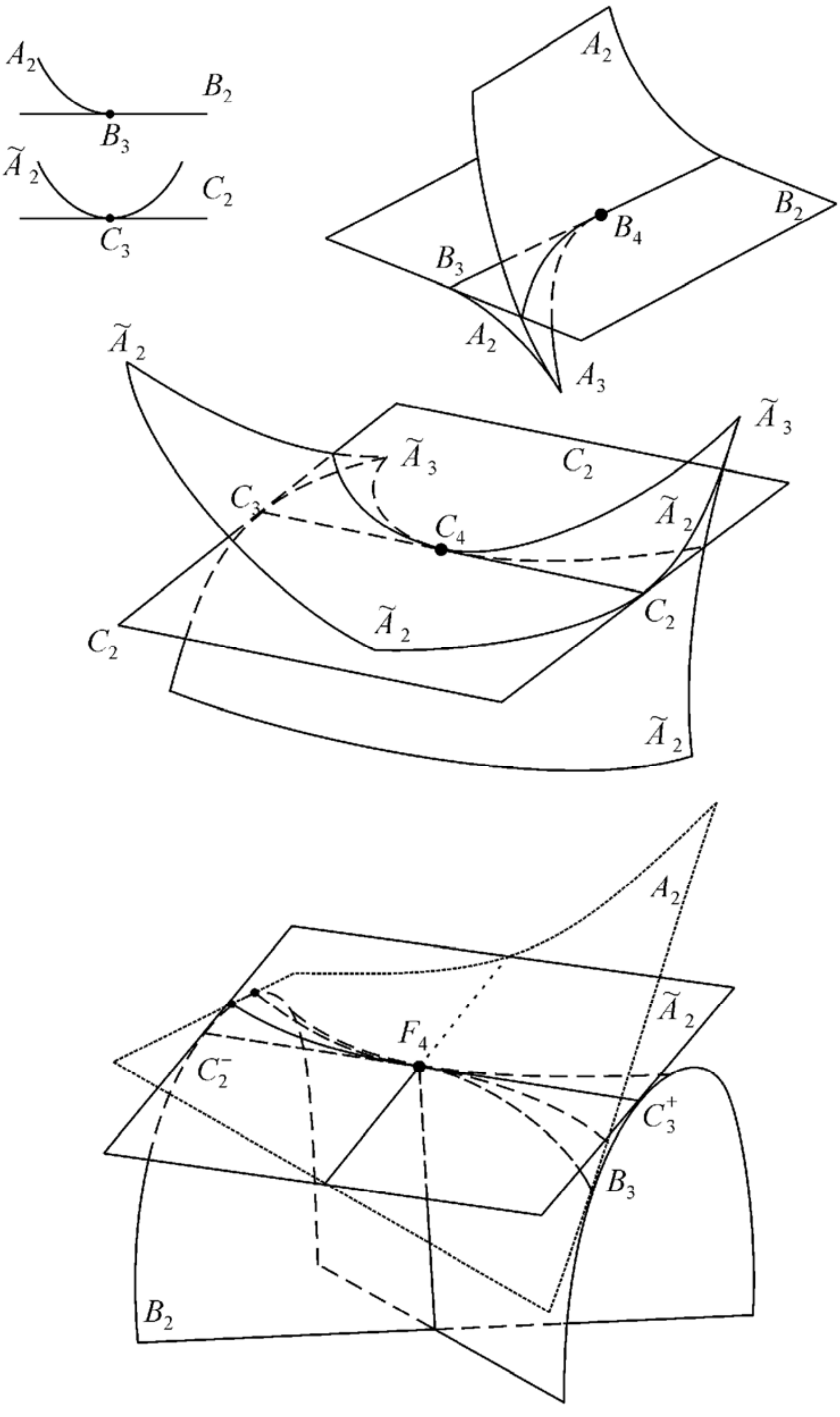


Рис. 44

другим классификациям «простых» объектов. Одной из них является классификация групп симметрий правильных целочисленных многогранников в многомерных пространствах.

Группой Вейля называется конечная группа ортогональных преобразований евклидова пространства V, которая порождена отражениями в гиперплоскостях и сохраняет некоторую полномерную целочисленную решетку в V. Неприводимые пары (группа Вейля, решетка) классифицируются по диаграммам Дынкина [36]; см. рис. 45.

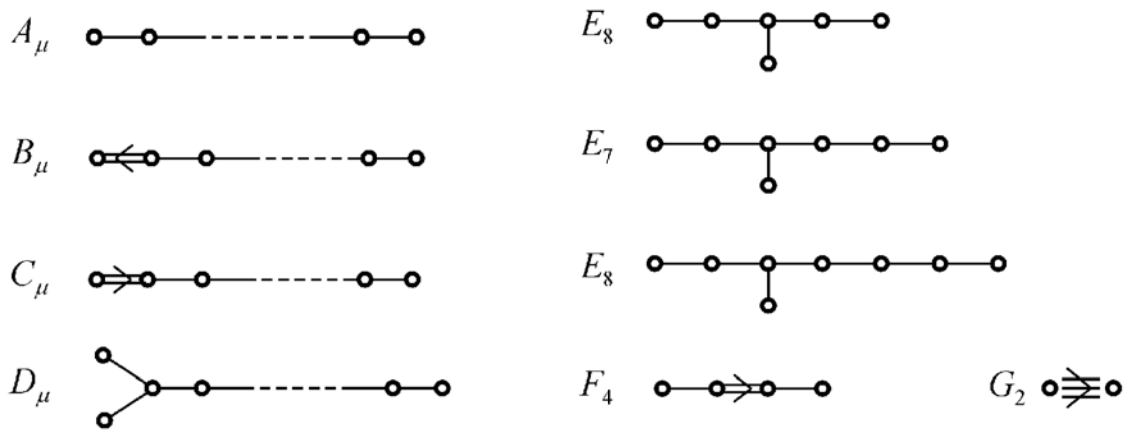


Рис. 45

Вершины диаграммы Дынкина соответствуют базисным векторам решетки $\mathbb{Z}^\mu$, ребра по определенным правилам задают скалярное произведение базисных векторов (отсутствие ребра означает их ортогональность). Соответствующая диаграмме группа Вейля порождается отражениями в гиперплоскостях, ортогональных базисным векторам решетки. Произвольная группа Вейля изоморфна прямому произведению неприводимых.

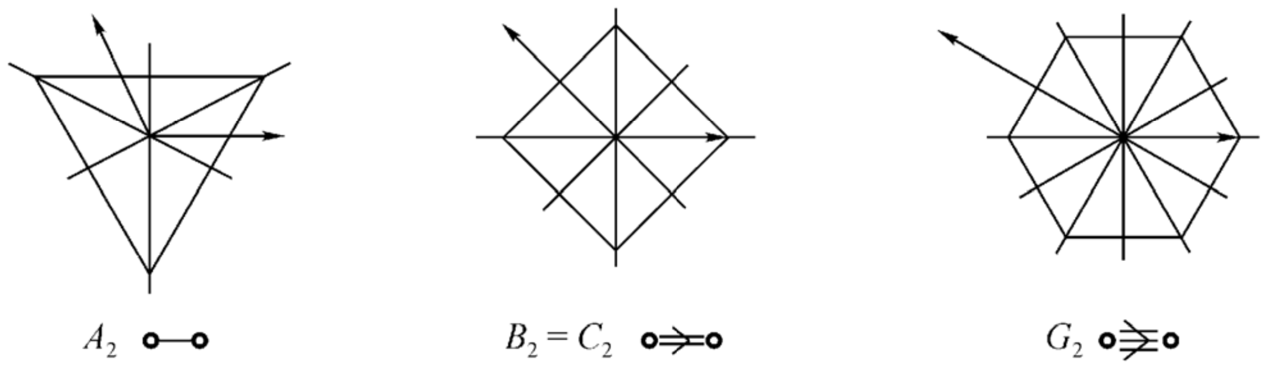


Рис. 46

Примеры. Группа Вейля A_1 — это группа $\mathbb{Z}_2$, действующая отражением на прямой. Группы Вейля на плоскости — это (помимо $A_1 \oplus A_1$)

группы симметрий правильного треугольника, квадрата и шестиугольника (рис. 46). Диаграмме C_μ отвечает группа симметрий μ-мерного куба, а B_μ — двойственного ему μ-мерного «октаэдра», так что соответствующие группы Вейля совпадают, но связанные с ними решетки различны.

Рассмотрим действие группы Вейля W в комплексифицированном μ-мерном пространстве $V^{\mathbb{C}}$. Оказывается, фактор-многообразие $V^{\mathbb{C}}/W$ неособо и диффеоморфно C^μ.

Пример. Для группы A_μ перестановок корней многочлена степени $\mu+1$ (с нулевой суммой) это основная теорема о симметрических многочленах: всякий симметрический многочлен однозначно представляется в виде многочлена от элементарных симметрических функций.

Рассмотрим все отражения в гиперплоскостях (зеркалах), лежащие в группе Вейля W. Образ зеркал при проекции $V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}/W$ (отображении Виета (F. Viete)) является особой гиперповерхностью и называется дискриминантом группы Вейля.

Пример. Дискриминант группы Вейля A_μ — многообразие многочленов с кратными корнями в μ-мерном пространстве многочленов степени $\mu+1$ от одной переменной с фиксированным старшим коэффициентом и нулевой суммой корней.

Теорема. *Комплексный фронт простого ростка диффеоморфен дискриминанту одноименной неприводимой группы Вейля.*

Следствие. *Страты комплексного фронта простого краевого ростка находятся во взаимно однозначном соответствии с поддиаграммами соответствующей диаграммы Дынкина (поддиаграмма получается выкидыванием некоторого числа вершин диаграммы вместе с примыкающими к ним ребрами, рис. 47).*

Замечание 1. Особенность с фронтом G_2 можно получить, как простую особенность в теории функции на плоскости, инвариантных относительно группы симметрии правильного треугольника.

Замечание 2. Помимо групп Вейля, платановых тел, фронтов и каустик по диаграммам Дынкина классифицируются и другие объекты, например, комплексные простые группы Ли [24]. Мы уже указывали на эту связь в гл. 1, п. 4.3 на примере симплектической группы $\mathrm{Sp}(2\mu, \mathbb{C})$ — ей отвечает диаграмма C_μ. Прямые соответствия между различными такими классификациями до конца не установлены, хотя многие из них известны. Так, по простои комплексной алгебре Ли можно построить простую особенность поверхностей в $\mathbb{C}^3$ вместе с ее миниверсальной деформацией [37]. Общая причина универсальности A, B, C, D, E, F, G-классификации совершенно не ясна.

3.4. Перестройки волновых фронтов и каустик. Распространяющийся волновой фронт не во все моменты времени будет фронтом общего положения: в отдельные моменты времени он перестраивается. Исследование таких перестроек приводит к задаче об особенностях общего положения в семействе лежандровых отображений.

Рассмотрим семейство лежандровых отображений, зависящих от одного параметра t — времени. Объединение фронтов, соответствующих различным значениям t, в пространстве-времени (произведении базы на ось времени) мы будем называть большим фронтом.

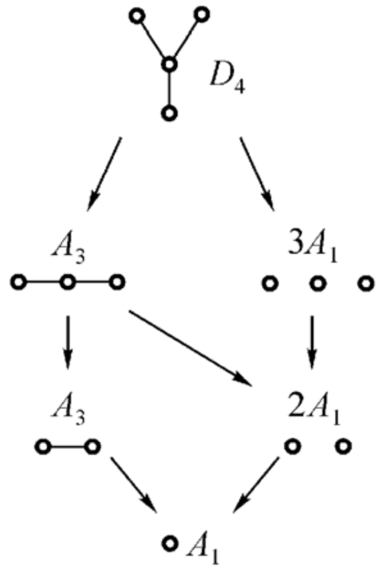


Рис. 47

Лемма. *Росток большого фронта в каждой точке является ростком фронта лежандрова отображения в пространство-время.*

Действительно, он задается производящим семейством $F_t(x,\, q) = 0$ гиперповерхностей в x-пространстве с $(q,\, t)$-пространством-временем в качестве базы.

Эквивалентность перестроек фронтов — это диффеоморфизм пространства-времени, переводящий большие фронты друг в друга и сохраняющий функцию времени на этом пространстве с точностью до аддитивной константы: $t \mapsto t + \mathrm{const}$.

Пример. Специальные перестройки. Рассмотрим большой фронт Σ в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\mu$, являющийся произведением $\mathbb{R}^m$ на фронт простого ростка кратности μ. Выберем в качестве миниверсальной деформации простого ростка f мономиальную деформацию вида

$$f(x) + q_0 e_{\mu-1}(x) + \ldots + q_{\mu-2} e_1(x) + q_{\mu-1},$$

где $e_{\mu-1}(x)$ представляет класс наивысшей квазиоднородной степени в локальной алгебре ростка (например, для $A_\mu : x^{\mu+1} + q_0 \lambda^{\mu-1} + \ldots + q_{\mu-1}$).

Обозначим через $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ координаты в $\mathbb{R}^m$ и зададим специальную перестройку функцией времени в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\mu$ вида

$$t = \pm q_0 \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2$$

либо $t = \tau_1$.

Теорема. *Перестройки в однопараметрических семействах общего положения фронтов в пространствах размерности $l < 6$ локально эквивалентны росткам специальных перестроек в нуле, причем $\mu + m = l + 1$* (рис. 48).

Идея доказательства. Рассмотрим накрытие (разветвленное) пространства многочленов вида $x^{\mu+1} + q_0 x^{\mu-1} + \ldots + q_{\mu-1}$ $(q \in \mathbb{C}^\mu)$ пространством их комплексных корней $\{(x_0, \ldots, x_\mu) \mid \sum x_i = 0\}$. Коэффициенты q_k оказываются тогда элементарными симметрическими полиномами корней: $q_k = (-1)^k \sum x_{i_0} \ldots x_{i_{k+1}}$. Функция времени $t(q)$ общего положения удовлетворяет требованию $c = \left.\dfrac{\partial t}{\partial q_0}\right|_0 \neq 0$. Это означает, что как функция на пространстве корней, функция времени имеет невырожденный квадратичный дифференциал $c \cdot \sum dx_i\, dx_j$, $\sum dx_j = 0$. Теперь в случае перестройки голоморфного фронта типа A_μ доказательство теоремы завершает

Эквивариантная лемма Морса [31]. *Голоморфная функция в $\mathbb{C}^k$, инвариантная относительно линейного представления компактной (например, конечной) группы G в $\mathbb{C}^k$, с невырожденной критической точкой в нуле приводится к своей квадратичной части локальным диффеоморфизмом, коммутирующим с действием G.*

Можно показать, что такой диффеоморфизм опускается до диффеоморфизма пространства многочленов.

Общий случай получается аналогично с использованием отображений Виета $V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}/W$ других групп Вейля (и при $m > 0$ — леммы Морса с параметрами из п. 2.2).

Перестройки каустик в однопараметрических семействах общего положения, подобно перестройкам фронтов, описываются разбиениями большой каустики — объединения мгновенных каустик в пространстве-времени — поверхностями уровня функции времени. Однако, в отсутствие аналога отображения Виета для каустик, эти перестройки даже для простых больших каустик не имеют такой универсальной нормальной формы, как перестройки фронтов.

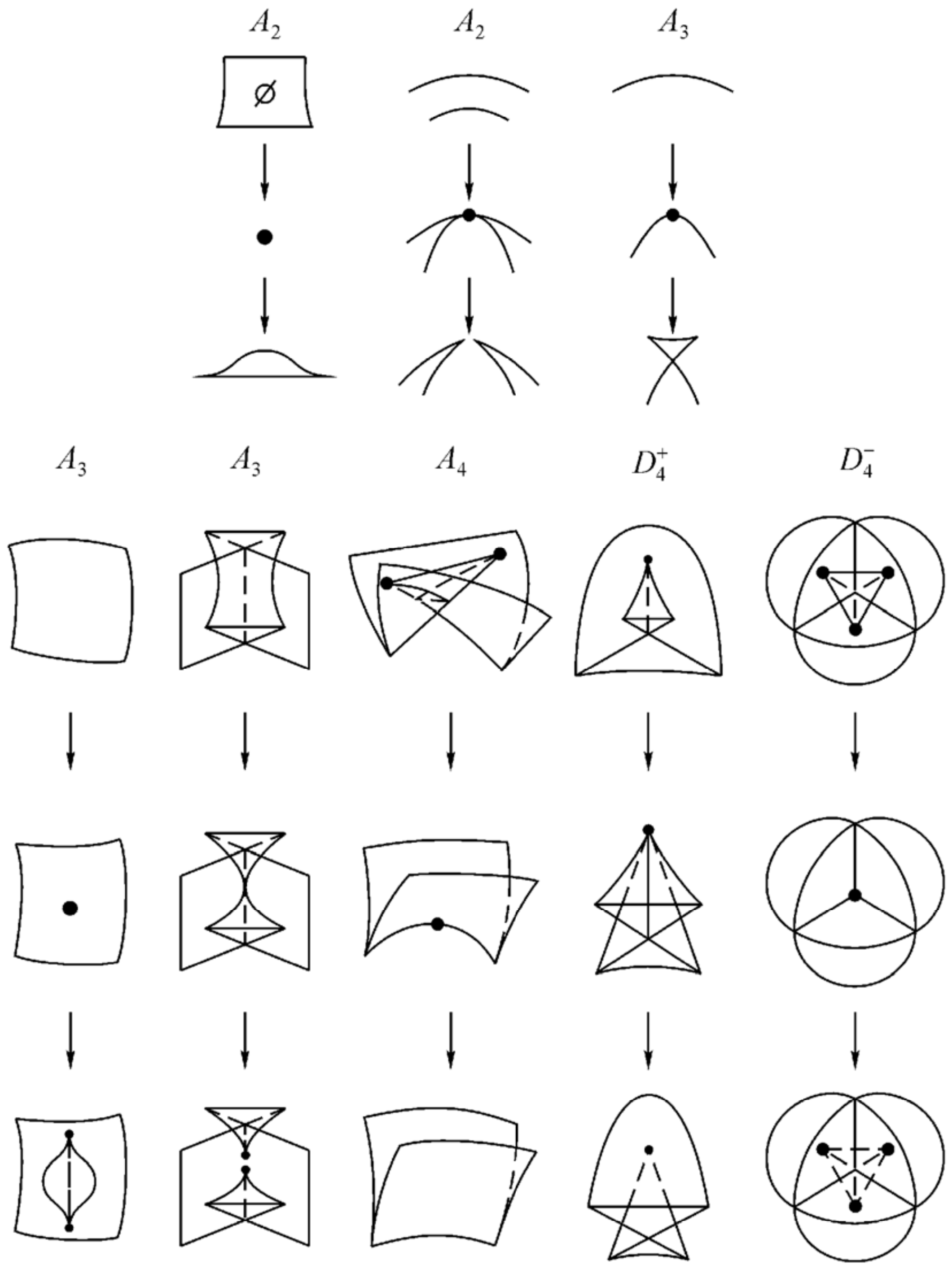


Рис. 48

Список нормальных форм функции времени вычислен в случаях A_μ и D_μ [6]. Большая каустика задается производящим семейством

$$F = \pm x^{\mu+1} + q_0 x^{\mu-1} + \ldots + q_{\mu-2} x$$

в случае A_μ и

$$F = x_1^2 x_2 \pm x_0^{\mu-1} + q_0 x_2^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu-3} x_2 + q_{\mu-2} x_1$$

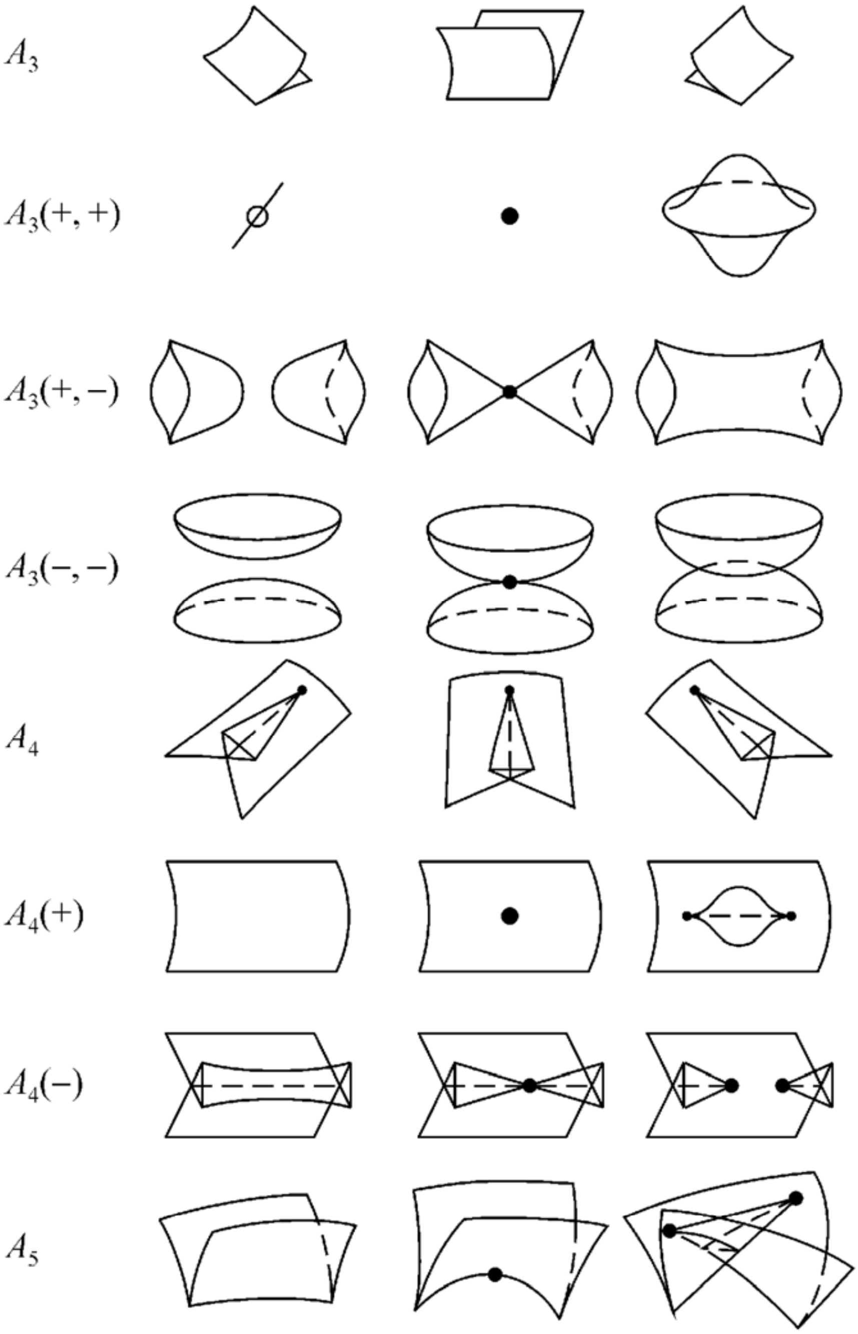


Рис. 49

в случае D_μ. Здесь пространство-время есть $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mu-1}$, $q \in \mathbb{R}^{\mu-1}$, $\tau \in \mathbb{R}^m$. Эквивалентностью перестроек росток функции времени общего положения можно привести в случае A_μ к виду $t = \tau_1$ либо $t = \pm q_0 \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2$, а в случае D_μ, если допускать также диффеоморфизмы оси значений функции времени, — к виду $t = \tau_1$ либо $t = \pm q_0 - q_{\mu-1} + aq_1 \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2$. Если в случае D_μ при $m = 0$, приводя функцию времени к нормальной форме, допускать диффеоморфизмы проколотой окрестности начала координат в пространстве-времени,

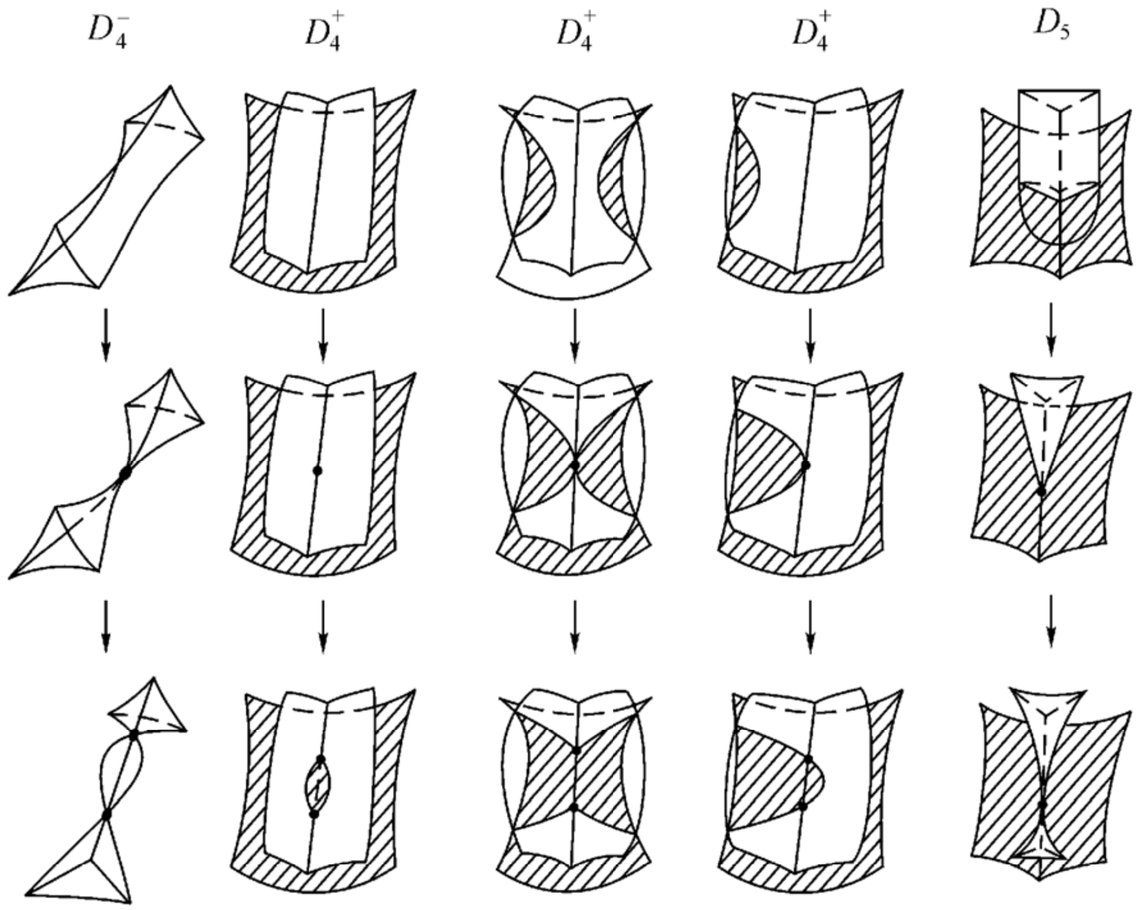


Рис. 50

непрерывно продолжающиеся в эту точку, то получающаяся топологическая классификация перестроек общего положения оказывается конечной (В. И. Бахтин): для D_4^- $t = q_0 + q_1$, для D_4^+ $t = q_0 \pm q_1$ либо $t = q_0 + q_3$, для D_{2k} при $k \geqslant 3$ $t = q_0 \pm q$, для D_{2k+1} $t = \pm q_0$.

В общих однопараметрических семействах каустик в пространствах размерности $l \leqslant 3$ встречаются лишь перестройки, эквивалентные перечисленным перестройкам типов A_μ и D_μ с $\mu - 2 + m = l$. На рис. 49, 50 изображены эти перестройки при $l = 3$.

Не все перестройки каустик реализуются в геометрической оптике. Так, каустика пучка прямолинейных лучей от гладкого источника на плоскости не имеет точек перегиба (это станет ясно в п. 3.5). «Летающая тарелка» перестройки $A_3(+, +)$ также не может быть реализована как каустика пучка геодезических римановой метрики на трехмерном многообразии.

3.5. Фронты в задаче об обходе препятствия. В задаче о скорейшем обходе препятствия, ограниченного гладкой поверхностью в евклидовом пространстве, экстремали суть лучи, срывающиеся по касательным направлениям к пучку геодезических на поверхности препятствия. В п. 1.6 гл. 3 были изучены особенности системы лучей, касательных к пучку геодезических на поверхности общего положения. Здесь мы опишем, следуя О. П. Щербаку, особенности функции времени и ее уровней — фронтов, в предположении об однозначности функции времени на поверхности препятствия. Среди нормальных форм в этой задаче появляется дискриминант группы симметрий икосаэдра.

Применительно к нашей задаче принцип Гюйгенса состоит в том, что каждая точка x поверхности препятствия излучает в пространство вдоль всех лучей, близких к направлению геодезической пучка на поверхности в точке x. Оптическая длина пути, состоящего из отрезка геодезической пучка от источника до точки x и отрезка луча из точки x в точку q пространства (рис. 51), есть $F(x, q) = \varphi(x) + G(x, q)$, где $\varphi(x)$ — функция времени на поверхности, $G(x, q)$ — расстояние между x и q в пространстве. Экстремали задачи об обходе препятствия, проходящие через точку q, срываются с поверхности препятствия в критических точках функции $F(\cdot, q)$. Решающее для дальнейшего наблюдение состоит в том, что все критические точки производящего семейства F четнократны. Доказательство изображено на рис. 52: экстремали общего положения отвечает критическая точка типа A_2, кратность более сложной критической точки равна удвоенному числу точек типа A_2, на которые она распадается при возмущении параметра q.

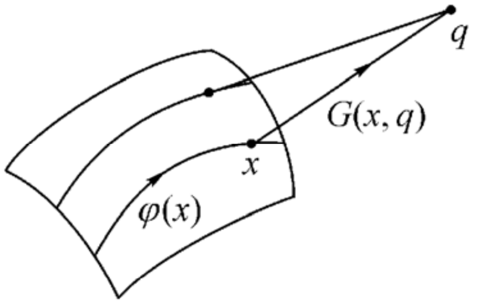


Рис. 51

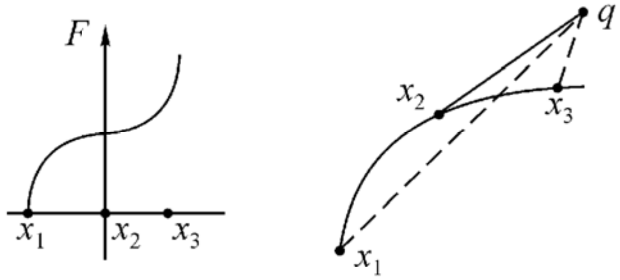


Рис. 52

Приведение к нормальной форме производящих семейств $F(x, q)$ в случае общего положения сводится к перечислению таких максимальных подсемейств (с неособой базой) в R-миниверсальных семействах четнократных ростков функций, в которых все функции имеют только четнократные критические точки. Ниже перечислены такие деформации простых ростков

$$A'_{2k}\colon y^2 + \int\limits_0^x (u^k + q_1 u^{k-2} + \ldots + q_{k-1})^2 du + q_k;$$

$$D'_{2k}\colon x^2 y - \int\limits_0^y [(u^k + q_1 u^{k-1} + \ldots + q_{k-2}u^2 + q_{k-1})^2 - q_{k-1}^2]u^{-2}\,du \pm$$

$$\pm\, q_{k-1}x + q_k;$$

$$E'_6\colon x^3 + y^4 + q_1 y^2 + q_2 y + q_3;$$

$$E'_8\colon x^3 + y^5 + q_1 y^3 + q_2 y^2 + q_3 y + q_4;$$

$$E''_8\colon x^3 + \int\limits_0^y (u^2 + q_1 x + q_2)^2\,du + q_3 x + q_4.$$

Фронт семейства состоит из точек в пространстве параметров, которым отвечают функции с критической точкой на нулевом уровне.

Теорема. *Функции производящего семейства в задаче об обходе препятствия общего положения в пространстве в случае пучка геодезических общего положения на поверхности препятствия имеют лишь простые критические точки. График функции времени в 4-мерном пространстве времени (большой фронт по терминологии п. 3.4) в окрестности любой точки диффеоморфен декартову произведению фронта одного из семейств A'_2, A'_4, A'_6, D'_4, D'_6, D'_8, E'_8, E''_8 на неособое многообразие.*

Пример 1. Семейству A'_2 отвечают неособые точки фронта.

Пример 2. Линии самопересечения ласточкина хвоста — каустики R_+-версальной деформации ростка A_4 — отвечают функции с двумя критическими точками типа A_2. Так получается семейство A'_4 предыдущего списка. Его фронт $q_2 \sim \pm q_1^{5/2}$ диффеоморфен дискриминанту группы H_2 симметрий правильного 5-угольника.

Пример 3. На рис. 53а показана перестройка фронта в окрестности точки перегиба препятствия на плоскости. График функции времени

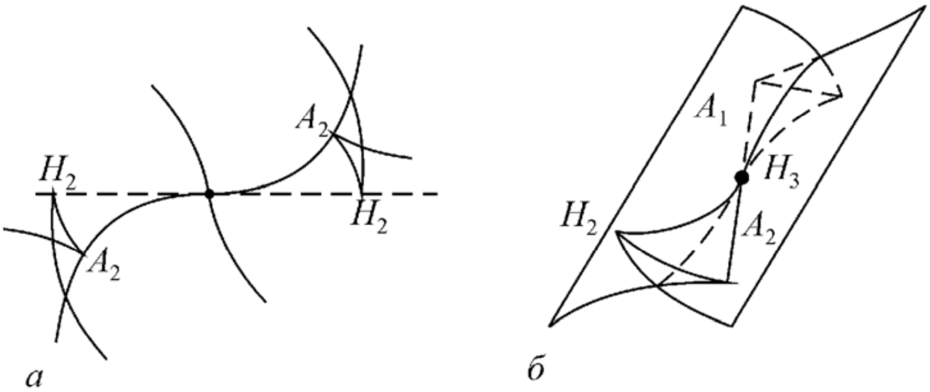


Рис. 53

(рис. 53б) диффеоморфен дискриминанту группы H_3 симметрий икосаэдра[1]. Дискриминант H_3 есть фронт семейства D_6'. Он диффеоморфен также фронту в окрестности таких точек на поверхности препятствия в пространстве, в которых геодезическая пучка имеет асимптотическое направление.

Пример 4. После срыва с поверхности препятствия в неасимптотическом направлении лучи могут фокусироваться вдали от него, образуя каустику. Перестройки фронта в окрестности неособой точки, точки на ребре возврата или вершины ласточкина хвоста такой каустики описываются семействами $D_4'(x^3 - y^3 + q_1 y + q_2)$, E_6' и E_8'. Эти семейства получаются из R-версальных семейств ростков A_2, A_3, A_4 добавлением куба новой переменной. Такая операция превращает все критические точки функций исходного семейства в четнократные, но не меняет его фронт.

Пример 5. В классификации правильных многогранников (см. [36]) следом за пятиугольником и икосаэдром стоит 120-вершинник в четырехмерном пространстве. Его можно описать так. Группа Ли $\mathbf{SU}_2$ кватернионов единичной длины содержит бинарную группу икосаэдра (см. п. 2.4). Ее 120 элементов и есть вершины нашего многогранника в пространстве кватернионов. Дискриминант группы H_4 симметрий этого многогранника диффеоморфен фронту семейства E_8''. В задаче об обходе препятствия этот фронт встречается как график функции времени в окрестности точки пересечения асимптотического луча с ребром возврата каустики вдали от поверхности препятствия[2].

[1] Другое описание: объединение касательных к кривой (t, t^3, t^5) в $\mathbb{R}^3$.

[2] Такой луч срывается с препятствия в параболической точке.

Если мы обратимся теперь к классификации неприводимых групп Кокстера (H. S. M. Coxeter) — конечных групп, порожденных отражениями, но не обязательно сохраняющих целочисленную решетку (см. [36]), то обнаружим, что среди волновых фронтов в различных задачах геометрической оптики нам встретились дискриминанты всех таких групп, за исключением групп симметрий правильных n-угольников с $n \geqslant 6$.

Глава 6
Лагранжевы и лежандровы кобордизмы

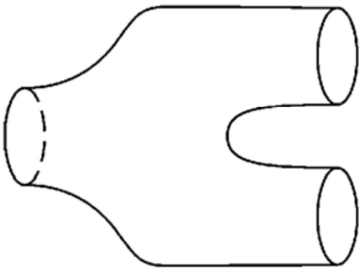


Рис. 54

Теория кобордизмов изучает свойства гладкого многообразия, не меняющиеся при его замене на другое многообразие той же размерности, которое вместе с первым образует край многообразия на единицу большей размерности (рис. 54). В этой главе многообразия и ограничиваемые ими пленки будут лагранжевыми или лежандровыми подмногообразиями. Соответствующие теории кобордизмов отражают, например, глобальные свойства волновых фронтов, сохраняющиеся при перестройках[1].

§ 1. Индекс Маслова

Лагранжево подмногообразие фазового пространства описывает фазу коротковолнового колебания. Индекс Маслова сопоставляет кривым на лагранжевом подмногообразии целые числа. Эти числа входят в асимптотические выражения для решений волновых уравнений в коротковолновом пределе. В следующих параграфах индекс Маслова появится в роли простейшего характеристического класса теории лежандровых и лагранжевых кобордизмов.

1.1. Квазиклассическая асимптотика решений уравнения Шредингера. Рассмотрим уравнение Шредингера (E. Schrödinger)

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\Psi + U(q)\Psi \tag{1}$$

[1]Начиная с § 2, мы вынуждены оставить всякую заботу о неискушенном читателе. В порядке компенсации в § 1 включено совсем элементарное изложение теории кобордизмов волновых фронтов на плоскости.

(h — постоянная Планка (M.Planck), Δ — оператор Лапласа (P.S.Laplace) в $\mathbb{R}^n$), которому удовлетворяет амплитуда вероятности $\Psi(q,\, t)$ квантовомеханической частицы, движущейся в потенциале U.

Уравнению (1) отвечает классическая механическая система с гамильтонианом $H = p^2/2 + U(q)$ в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Начальному условию вида

$$\Psi(q,\, 0) = \varphi(q) \exp\left(\frac{if(q)}{h}\right)$$

(φ — финитная функция) отвечает функция φ на лагранжевом многообразии L в $\mathbb{R}^{2n}$ с производящей функцией $f\colon L = \{(p,\, q) \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, p = f_q\}$. Поток g^t гамильтониана H определяет семейство лагранжевых многообразий $L_t = g^t L$, которые при больших t могут, в отличие от L_0, неоднозначно проектироваться в конфигурационное пространство $\mathbb{R}^n$ (рис. 55). Возникает семейство лагранжевых отображений (см. п. 1.2, гл. 5) конфигурационного пространства в себя $Q_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Имеет место следующая асимптотическая формула для решения уравнения (1) с заданным начальным условием [19]. Пусть q_j — такие точки в $\mathbb{R}^n$, что $Q_t(q_j) = Q$, $x_j = (p_j,\, q_j)$ — соответствующие точки L_0. Предположим, что якобианы $\left|\dfrac{\partial Q_t}{\partial q}\right|_{q=q_j}$ отличны от нуля. Тогда при $h \to 0$

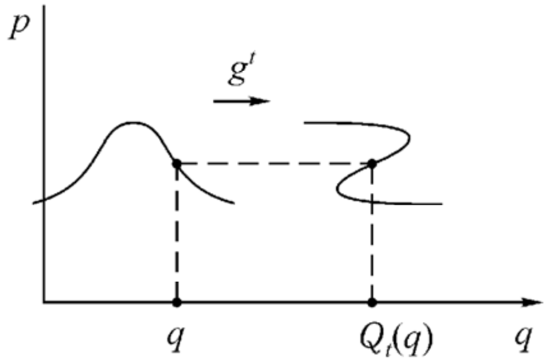


Рис. 55

$$\Psi(q,\, t) = \sum_j \varphi(q_j) \left|\frac{\partial Q_t}{\partial q_j}\right|^{-1/2} \exp\left(i\frac{S_j(Q,\, t)}{h} - \frac{i\pi\mu_j}{2}\right) + O(h),$$

где $S_j(Q,\, t)$ — действие вдоль траектории

$$g^\tau x_j\colon S_j(Q,\, t) = f(q_j) + \int\limits_0^t (p\, dq - H\, d\tau),$$

а μ_j — индекс Морса траектории $g^\tau x_j$, т. е. число критических точек лагранжевых проекций $L_\tau \to \mathbb{R}^n$ на этой траектории при $0 < \tau < t$.

1.2. Индекс Морса и индекс Маслова. Индекс Морса является частным случаем индекса Маслова. Пусть в пространстве кокасательного расслоения T^*X конфигурационного многообразия X задано лагранжево подмногообразие L общего положения. *Индексом Маслова* ориентированной кривой на L называется ее индекс пересечения с циклом особых точек лагранжевой проекции $L \to X$. Это определение нуждается в уточнении.

Лемма. *Множество* Γ *особых точек лагранжевой проекции* $L \to X$ *— гиперповерхность в* L*, гладкая вне множества коразмерности* 3 *в* L*. Гиперповерхность* Γ *обладает канонической коориентацией, т.е. в каждой ее точке* (*вне множества коразмерности* 3) *можно указать, какая сторона* Γ *«положительная», какая — «отрицательная».*

Индекс Маслова ориентированной кривой общего положения на L определяется теперь, как число ее переходов с «положительной» стороны Γ на «отрицательную» минус число обратных переходов. Для произвольной кривой, концы которой не лежат на Γ, ее индекс Маслова принимается равным индексу Маслова ее возмущения и, по лемме, не зависит от этого возмущения.

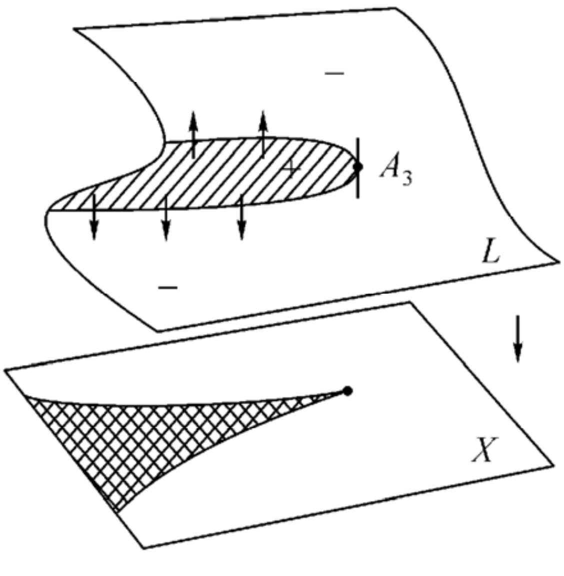


Рис. 56

Доказательство.

В соответствии с классификацией лагранжевых особенностей (гл. 5), росток лагранжева отображения $L \to X$ в общей точке имеет тип A_1, в точках некоторой гиперповерхности — тип A_2 (общие точки Γ), в точках многообразия коразмерности 2 — тип A_3. Изучение нормальной формы ростка A_3 показывает, что в точках типа A_3 гиперповерхность Γ неособа (рис. 56). Особенности Γ начинаются со страта D_4 и образуют множество коразмерности больше либо равной 3. Для коориентации гиперповерхности Γ рассмотрим интеграл действия $\int p\,dq$. Локально на многообразии L он определяет однозначно с точностью до постоянного слагаемого гладкую функцию S — производящую функцию для L. В особой точке типа A_2 ядро дифференциала лагранжевой проекции $L \to X$ одномерно и является трансверсальной к Γ касательной прямой. На этой прямой первый и второй дифференциал функции S обращаются в нуль, поэтому корректно определен третий дифференциал. Он отличен от нуля. Мы принимаем за «положительную» ту сторону гиперповерхности Γ, в направлении которой третий дифференциал функции S растет. Непосредственная проверка (рис. 56) показывает, что такая коориентация корректно продолжается в точки типа A_3. ■

Индекс Морса можно интерпретировать как индекс Маслова. Рассмотрим фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n+2}$ с координатами (p_0, p, q_0, q), где $(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$. Если положить $q_0 = \tau$, $p_0 = -H(p, q)$, а точку (p, q) заставить пробегать лагранжево многообразие L_τ в $\mathbb{R}^{2n}$, то при изменении τ от 0 до t получим $(n+1)$-мерное лагранжево многообразие L в $\mathbb{R}^{2n+2}$. Фазовые кривые потока гамильтониана H, начинающиеся на L_0, можно рассматривать как кривые на L. Индекс Маслова такой кривой на L совпадает с индексом Морса исходной фазовой кривой в $\mathbb{R}^{2n}$. Действительно, вклад критической точки типа A_2 лагранжевой проекции $L_\tau \to \mathbb{R}^n$ в индекс Маслова проходящей через эту точку фазовой кривой определяется знаком производной $\dfrac{\partial^3 S}{\partial v^2 \partial t}$, где $S = \int(p\,dq - H\,d\tau)$ — производящая функция для L, v — вектор из ядра дифференциала проекции $L \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^{n+1}$ рассматриваемой в критической точке. Эта производная всегда отрицательна ввиду выпуклости функции $H = \dfrac{p^2}{2} + U(q)$ по импульсам. Поэтому каждая критическая точка, лежащая на фазовой кривой, дает вклад $+1$ как в ее индекс Маслова, так и в индекс Морса.

1.3. Индекс Маслова замкнутых кривых. Индекс пересечения замкнутой кривой на лагранжевом многообразии $L \subset T^*X$ с неориентированной гиперповерхностью Γ особых точек проекции $L \to X$ не меняется при замене кривой на гомологичную. Поэтому Γ определяет *класс Маслова* в группе когомологий $H^1(L, \mathbb{Z})$.

Индексы Маслова замкнутых кривых входят в асимптотические формулы для решений стационарных задач (собственных колебаний) [19]. Предположим, что на многообразии уровня $H = E$ гамильтониана $H = \dfrac{p^2}{2} + U(q)$ лежит лагранжево подмногообразие L. Если последовательность чисел $\mu_N \to \infty$ удовлетворяет условиям

$$\frac{2\mu_N}{\pi} \oint_\gamma p\,dq \equiv \operatorname{ind}\gamma \pmod 4$$

для всех замкнутых контуров γ на L (для существования последовательности μ_N достаточно существования хотя бы одного такого числа $\mu \neq 0$), то уравнение $\Delta\Psi/2 = \lambda^2(U(q) - E)\Psi$ имеет серию собственных чисел λ_N с асимптотикой $\lambda_N = \mu_N + O(\mu_N^{-1})$.

В одномерном случае лагранжево многообразие — окружность, ее индекс равен двум, и предыдущая формула превращается в так называемое «условие квантования» (см. статью Д. А. Кириллова)

$$\mu \oint\limits_{H=E} p\,dq = 2\pi\Big(N + \frac{1}{2}\Big).$$

Например, в случае $H = p^2/2 + q^2/2$ при заданной постоянной Планка $h = 1/\mu$ получаем точные значения для собственных уровней энергии $E_N = h(N + 1/2)$, $N = 0, 1, \ldots$, квантового гармонического осциллятора.

Класс Маслова лагранжевых подмногообразий стандартного симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$ является прообразом универсального класса лагранжева грассманиана Λ_n при отображении Гаусса (G. F. Gauss). *Отображение Гаусса* $G\colon L \to \Lambda_n$ сопоставляет точке лагранжева подмногообразия касательное лагранжево пространство в этой точке. Группа когомологий $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}$.

Теорема. *Образующая группы $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$ при гомоморфизме*

$$G^*: H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z}) \to H^1(L, \mathbb{Z})$$

переходит в класс Маслова.

Следствие. *Класс Маслова лагранжева подмногообразия в $\mathbb{R}^{2n}$ не зависит от лагранжевой проекции $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$.*

Ниже приведены два описания образующей в группе $H^1(L, \mathbb{Z})$.

1.4. Лагранжев грассманиан и универсальный класс Маслова. *Лагранжевым грассманианом* Λ_n называется многообразие всех лагранжевых линейных подпространств $2n$-мерного симплектического пространства. Многообразие всех ориентированных лагранжевых подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$ называется *ориентированным* лагранжевым грассманианом и обозначается Λ_n^+. Очевидно, Λ_n^+ является двулистным накрытием Λ_n.

Пример 1. $\Lambda_1 = \mathbb{R}\mathbf{P}^1 \cong \Lambda_1^+ = \mathbf{S}^1$.

Пример 2. Многообразие Λ_2 изоморфно квадрике $x^2+y^2+z^2 = u^2+v^2$ в $\mathbb{R}\mathbf{P}^4$ как проективное алгебраическое многообразие (см.п.1.3, гл. 1). Многообразие Λ_2^+ диффеоморфно $\mathbf{S}^2\times\mathbf{S}^1$. Накрытие $\Lambda_2^+\to\Lambda_2$ является факторизацией $\mathbf{S}^2\times\mathbf{S}^1$ по антимодальной инволюции $(x, y)\mapsto (-x, -y)$ (в [48] Λ_2 найдено неверно).

Пример 3. $\dim\Lambda_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$: лагранжево подпространство общего положения в $\mathbb{R}^{2n}$ задается производящей квадратичной формой от n переменных.

Теорема. *Грассмановы многообразия лагранжевых подпространств в* $\mathbb{C}^n$ *являются однородными пространствами:* $\Lambda_n = \mathbf{U}_n/\mathbf{O}_n$, $\Lambda_n^+ = \mathbf{U}_n/\mathbf{SO}_n$, *где* $\mathbf{U}_n, \mathbf{O}_n, \mathbf{SO}_n$ *— унитарная, ортогональная и специальная ортогональная группы соответственно.*

Действительно, ортонормированный базис лагранжева подпространства в $\mathbb{C}^n$ является унитарным базисом в $\mathbb{C}^n$ и обратно, вещественная линейная оболочка унитарного репера в $\mathbb{C}^n$ является лагранжевым подпространством. Унитарные базисы, порождающие одно и то же лагранжево подпространство, получаются друг из друга ортогональным преобразованием этого подпространства.

Следствие. $\pi_1(\Lambda_n) = H_1(\Lambda_n, \mathbb{Z}) \cong H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Рассмотрим отображение $\det^2\colon \mathbf{U}_n \to \mathbf{C}^\times$, сопоставляющее унитарной матрице квадрат ее определителя. Отображение $\det^2$ корректно определяет расслоение лагранжева грассманиана Λ_n над окружностью $\mathbf{S}^1 = \{e^{i\varphi}\}$ комплексных чисел с модулем 1. Слои $\mathbf{SU}_n/\mathbf{SO}_n$ этого расслоения односвязен, поэтому дифференциальная 1-форма $\alpha = (1/2\pi)(\det^2)^*\,d\varphi$ на Λ_n представляет образующую группы одномерных когомологий $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$. Эту образующую мы будем называть *универсальным классом Маслова.*

Пример. $\det^2\colon \Lambda_1 \to \mathbf{S}^1$ — диффеоморфизм, $\alpha = d\theta/\pi$, где θ — угловая координата прямой $l\in\Lambda_1$ на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определим вложение $j\colon \Lambda_{n-1}\hookrightarrow\Lambda_n$ следующим образом. Пусть H — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{2n}$. Проекция $H\to H/H^\perp$ в $(2n-2)$-мерное симплектическое пространство характеристик гиперплоскости H устанавливает взаимно однозначное соответствие между $(n-1)$-мерными лагранжевыми подпространствами в $H/H^{\perp}$ и n-мерными лагранжевыми подпространствами, лежащими в H.

Лемма. *Вложение j индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.*

Действительно, последовательность вложений $\Lambda_1 \hookrightarrow \Lambda_2 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \Lambda_n$ отображает окружность Λ_1 в окружность S, по которой интеграл 1-формы α на Λ_n равен единице, т. е. вложение $\Lambda_1 \hookrightarrow \Lambda_n$ индуцирует изоморфизм $\pi_1(\Lambda_1) \to \pi_1(\Lambda_n)$.

Предъявим теперь цикл, двойственный образующей группы $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Фиксируем лагранжево подпространство $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ и обозначим через Σ гиперповерхность в Λ_n, образованную лагранжевыми подпространствами в $\mathbb{R}^{2n}$, не трансверсальными L. Лагранжевы пространства в $\mathbb{R}^{2n}$, пересекающиеся с L по подпространствам размерности 2 и более, образуют множество Σ' коразмерности 3 в Λ_n (и 2 в Σ). В точках $\lambda \in \Sigma \setminus \Sigma'$ гиперповерхность Σ гладкая. Коориентируем Σ, выбирая в качестве вектора положительной нормали в точке λ вектор скорости кривой $e^{i\theta}\lambda$ (он трансверсален к Σ).

Теорема. *Индекс пересечения 1-цикла в Λ_n с коориентированным циклом Σ равен значению универсального класса Маслова на этом 1-цикле.*

Действительно, индекс пересечения образующей S группы $H_1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$ с циклом Σ равен 1.

Цикл Γ особенностей проекции лагранжева подмногообразия в $\mathbb{R}^{2n}$ вдоль лагранжева подпространства L — прообраз цикла Σ при гауссовом отображении. Отсюда следует теорема п. 1.3.

Замечание. Индекс Маслова нашел применение в теории представлений [57]. В этом контексте используется серия индексов Маслова — симплектических инвариантов цепочек k лагранжевых подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$. Простейший из них тройной индекс $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ равен сигнатуре квадратичной формы

$$Q(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) = \omega(x_1, x_2) + \omega(x_2, x_3) + \omega(x_3, x_1)$$

на прямой сумме лагранжевых подпространств $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$, где ω — симплектическая форма в $\mathbb{R}^{2n}$. Он обладает свойством коцикла:

$$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - \tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4) + \tau(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) - \tau(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 0.$$

С помощью индекса Маслова четверки подпространств $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)+$ $+\tau(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4)$ можно на лагранжевом подмногообразии в пространстве кокасательного расслоения любого многообразия определить коцикл Чеха, отвечающий классу Маслова из п. 1.3 (см. [48]).

1.5. Кобордизмы волновых фронтов на плоскости. Простейший пример лежандрова кобордизма — соотношение между следами распространяющегося в трехмерной среде волнового фронта на ее границе в разные моменты времени. Эти следы не обязательно гомеоморфны, но их кобордантность накладывает ограничения на типы особенностей (см. следствие 1 ниже).

Два компактных волновых фронта F_0, F_1 на плоскости называются *кобордантными,* если в прямом произведении плоскости на отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$ существует трансверсальный плоскостям $t = 0$ и $t = 1$ компактный фронт K, пересечение которого с первой из них есть F_0, а со второй — F_1 (рис. 57). Фронт K называется *кобордизмом.* Мы различаем случаи ориентированных и неориентированных, *вооруженных* (коориентированных) или невооруженных фронтов и кобордизмов. Вооружение кобордизма K индуцирует вооружение края $\partial K = F_0 \cup F_1$, которое должно совпадать с собственным вооружением фронтов F_0, F_1 (т. е. совпадающие, но распространяющиеся в разные стороны фронты считаются разными и могут быть не кобордантными). То же самое относится и к ориентации. Сложение фронтов определяется как их несвязное объединение. Эта операция наделяет множество классов кобордантных фронтов структурой коммутативной полугруппы. В рассматриваемых случаях она оказывается группой. Нулем служит класс пустого фронта.

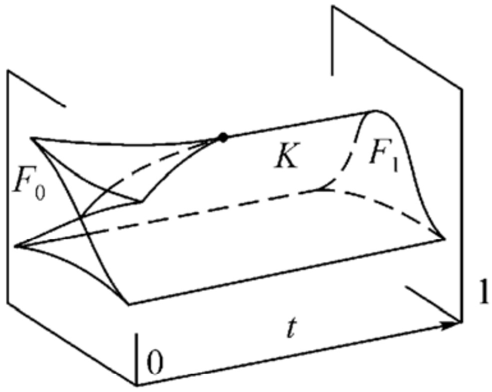


Рис. 57

Теорема [5]. *Группа классов кобордизма вооруженных ориентированных фронтов на плоскости — свободная циклическая (образующая — класс «бантика», рис. 58 а), вооруженных неориентированных — тривиальна, невооруженных — конечна: $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ для ориентированных и $\mathbb{Z}_2$ — для неориентированных фронтов (образующими можно взять классы «капель», рис. 58 б, различающихся ориентацией в ориентируемом случае).*

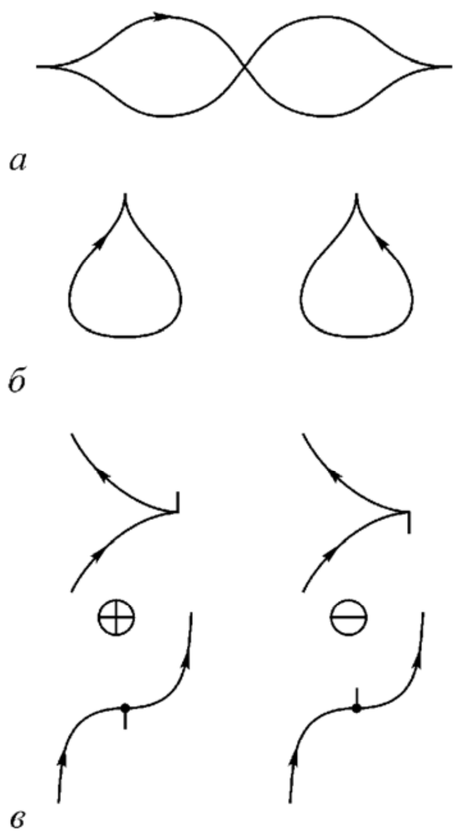


Рис. 58

Единственным инвариантом класса кобордизма вооруженного ориентированного фронта на плоскости служит его индекс — число точек возврата (или число точек перегиба) с учетом знаков, рис. 58 в. Индекс компактного фронта в $\mathbb{R}^2$ четен.

Следствие 1. *Алгебраическое число точек возврата (перегиба) компактного следа на плоскости от распространяющегося в пространстве ориентированного волнового фронта четно и не меняется со временем.*

Индекс фронта следующим образом связан с индексом Маслова. Вооруженный фронт в $\mathbb{R}^2$ определяет коническую лагранжеву поверхность L в $T^*\mathbb{R}^2$ ковекторов, равных нулю на касающемся фронта контактном элементе и положительных на вооружающей нормали. Для фронта общего положения L гладко иммерсирована в $T^*\mathbb{R}^2$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ определяет иммерсию фронта в L (точке фронта отвечает ковектор, равный 1 на орте вооружающей нормали). Индекс ориентированного фронта в $\mathbb{R}^2$ равен индексу Маслова построенной кривой на L.

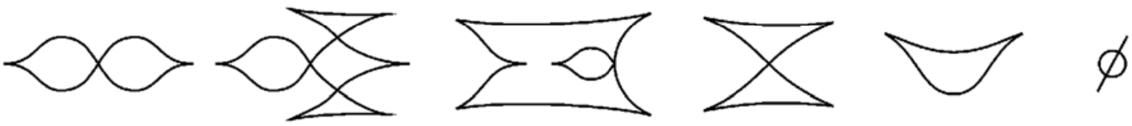


Рис. 59

Вычисление описанных в теореме групп кобордизмов основано на информации о перестройках волновых фронтов из п. 3.1 гл. 5. Так, неориентированная кобордантность нулю вооруженного бантика вытекает из серии перестроек рис. 59, использующей локальные перестройки A_2 и A_3 рис. 48.

Кобордизм K фронтов определяет иммерсированное лежандрово многообразие своих контактных элементов в многообразии всех контактных элементов произведения плоскости на отрезок.

Следствие 2. *Бутылка Клейна (F. Klein) допускает лежандрову иммерсию в* $\mathbb{R}^5$.

Эта иммерсия индуцируется перестройкой рис. 59 вместе с обратной серией: перестраивающиеся фронты на этом рисунке всюду имеют невертикальную касательную и их объединение заклеивает «бантик» листом Мебиуса (A. F. Möbius).

Теорема ([5], ср. п. 2.4, гл. 4). *Компактные связные двумерные многообразия с четной эйлеровой характеристикой допускают лежандрову иммерсию в контактное пространство* $\mathbb{R}^5$, *а с нечетной — не допускают даже лагранжевой иммерсии в* $\mathbb{R}^4$.

§ 2. Кобордизмы

В [5] определены около двух десятков различных теорий лагранжевых и лежандровых кобордизмов и вычислены соответствующие группы классов кобордантных кривых. Здесь мы рассмотрим в основном кобордизмы точных лагранжевых иммерсий — теорию, в которой получены наиболее законченные результаты.

2.1. Лагранжев и лежандров край. Пусть в пространстве кокасательного расслоения многообразия с краем задано иммерсированное лагранжево подмногообразие $L \hookrightarrow T^*M$, трансверсальное краю $\partial(T^*M)$. При отображении $\partial(T^*M) \to T^*(\partial M)$ (ковектору в точке края сопоставляется его ограничение на край) пересечение $L \cap \partial(T^*M)$ проектируется в иммерсированное лагранжево подмногообразие ∂L пространства кокасательного расслоения края. ∂L называется *лагранжевым краем* многообразия L.

Лежандров край ∂L иммерсированного в пространство 1-струй функций на многообразии с краем лежандрова многообразия $L \hookrightarrow J^1M$, трансверсального краю $\partial(J^1M)$, определяется аналогично с помощью проекции $\partial(J^1M) \to J^1\partial(M)$ (1-струе функции в точке края сопоставляется 1-струя ограничения функции на край). Подобным образом можно определить край лежандрова подмногообразия в пространстве (коориентированных) контактных элементов на многообразии с краем.

Лагранжевым кобордизмом компактных лагранжевых иммерсированных подмногообразий $L_0, L_1 \hookrightarrow T^*M$ называется иммерсированное лагранжево подмногообразие пространства $T^*(M \times [0, 1])$ — кокасательного расслоения цилиндра над M, лагранжев край которого есть разность $L_1 \times 1$ и $L_0 \times 0$ (для ориентированных кобордизмов изменение ориентации многообразия меняет его знак). Многообразия $L_0 L_1$ называются лагранжево (ориентированно) кобордантными, если существует лагранжев ориентированный кобордизм между ними.

Аналогично определяются *лежандровы кобордизмы.* В этом случае вместо кобордизма лежандровых многообразий можно говорить прямо о кобордизме фронтов. Теория кобордизмов лежандровых иммерсий в пространстве 1-струй функций эквивалентна теории кобордизмов точных лагранжевых иммерсий: при проекции $J^1T \to T^*M$ лежандровы иммерсированные подмногообразия переходят в такие лагранжевы иммерсированные многообразия, на которых 1-форма действия точна, и обратно (см. п. 2.3, гл. 4).

2.2. Кольцо классов кобордизма. Лагранжевы (лежандровы) иммерсии многообразий L_1, L_2 одинаковой размерности в симплектическое (контактное) многообразие задают иммерсию их несвязного объединения в это многообразие, называемую суммой исходных иммерсий.

Лемма [5]. *Классы лагранжево (лежандрово) кобордантных иммерсий в T^*M (J^1M, PT^*M или ST^*M) образуют абелеву группу относительно операции сложения.*

В самом простом и важном случае $M = \mathbb{R}^n$ определим произведение (точных) лагранжевых иммерсий $L_1 \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n$, $L_2 \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^m$ как (точную) лагранжеву иммерсию прямого произведения $L_1 \times L_2$ в $T^*\mathbb{R}^{n+m} = T^*\mathbb{R}^n \times T^*\mathbb{R}^m$. Соответствующие классы кобордизмов образуют относительно введенных операций кососкоммутативное градуированное кольцо.

Теорема ([3], [35], [69]).

1) *Градуированное кольцо $\mathfrak{R}\mathbf{L}_* = \bigoplus\limits_k \mathfrak{R}\mathbf{L}_k$ классов неориентированно лежандрова кобордизма в пространствах 1-струй функций в $\mathbb{R}^k$ изоморфно градуированному кольцу $\mathbb{Z}_2[x_5, x_9, x_{11} \ldots]$ полиномов с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ от образующих x_k нечетных степеней $k \neq 2^r - 1$.*

2) *Градуированное кольцо $\mathbf{L}_* = \bigoplus\limits_k \mathbf{L}_k$ классов ориентированного лежандрова кобордизма в пространствах 1-струй функций в $\mathbb{R}^k$ изоморфно по модулю кручения внешней алгебре над $\mathbb{Z}$ с образующими степеней $1, 5, 9, \ldots, 4n+1, \ldots$*

Мы далеки от того, чтобы доказывать эту теорему, но приведем основные результаты на пути к ее доказательству.

2.3. Векторные расслоения с тривиальной комплексификацией. Каждое k-мерное векторное расслоение с конечной клеточной базой X может быть индуцировано из универсального классифицирующего расслоения ξ_k. В качестве последнего можно взять тавтологическое расслоение над грассмановым многообразием $G_{\infty,k}$ всех k-мерных подпространств в пространстве $\mathbb{R}^N$ растущей размерности N (слоем тавтологического расслоения над точкой служит отвечающее ей k-мерное подпространство). Индуцирование расслоения над X при непрерывном отображении $X \to G_{\infty,k}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных k-мерных векторных расслоений с базой X и классами гомотопных отображений X в классифицирующее пространство $G_{\infty,k}$. В категории ориентированных векторных расслоений роль классифицирующих пространств играют грассманианы $G^+_{\infty,k}$ ориентированных k-мерных подпространств.

Пусть комплексификация вещественного k-мерного векторного расслоения над X тривиальна и тривиализация фиксирована.

Пример. Комплексификация касательного пространства L к лагранжеву многообразию, иммерсированному в овеществление $\mathbb{R}^{2k}$ эрмитова пространства $\mathbb{C}^k$ канонически изоморфна $\mathbb{C}^k = L \oplus iL$.

Сопоставляя точке из X подпространство в $\mathbb{C}^k$, с которым слой над ней отождествляется при тривиализации, получаем отображение X в грассманово многообразие k-мерных вещественных подпространств L в $\mathbb{C}^k$, для которых $L \cap iL = 0$. Этот грассманиан гомотопически эквивалентен лагранжеву грассманиану Λ_k.

Теорема [25]. *Тавтологическое расслоение $\lambda_k(\lambda_k^+)$ над (ориентированным) лагранжевым грассманианом $\Lambda_k(\Lambda_k^+)$ является классифицирующим в категории k-мерных (ориентированных) векторных расслоений с тривиализованной комплексификацией.*

2.4. Кобордизмы гладких многообразий. В этой классической теории два замкнутых многообразия (никуда не иммерсированных) называются кобордантными, если их разность является краем какого-нибудь компактного многообразия с краем. При вычислении соответствующих групп кобордизмов ключевую роль играет следующая

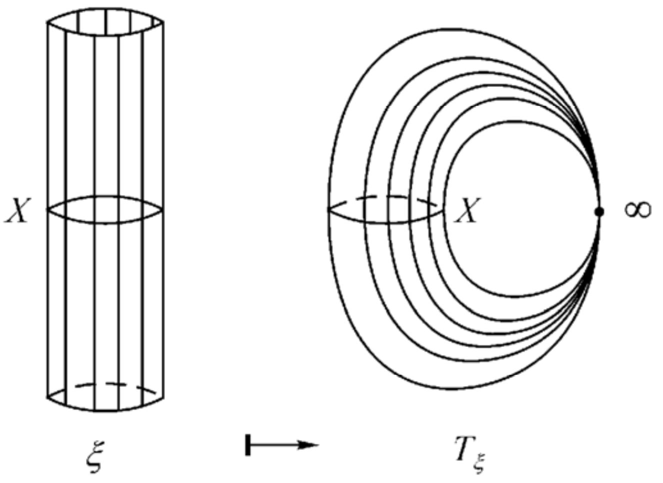


Рис. 60

конструкция. Пространством Тома (R. Thom) $T\xi$ векторного расслоения ξ с компактной базой называется одноточечная компактификация пространства этого расслоения (рис. 60). Индуцированию расслоения ξ из расслоения η при отображении баз $X \to Y$ отвечает отображение $T\xi \to T\eta$ пространств Тома, переводящее отмеченную точку (∞) в отмеченную. Пусть компактное n-мерное многообразие M вложено в сферу большой размерности $n+k$. Стягивание в точку дополнения к трубчатой окрестности M в $\mathbf{S}^{n+k}$ задает отображение $\mathbf{S}^{n+k} \to T_\nu$ сферы в пространство Тома нормального расслоения многообразия M. Индуцирование нормального расслоения из классифицирующего расслоения ξ_k доставляет отображение $T_\nu \to T\xi_k$ пространств Тома, которое в композиции с первым определяет отображение $\mathbf{S}^{n+k} \to T\xi_k$. Аналогичная конструкция, примененная к вложенному в $\mathbf{S}^{n+k} \times [0, 1]$ кобордизму многообразии, показывает, что классу кобордизма отвечает класс гомотопных отображений $\mathbf{S}^{n+k} \to T\xi_k$, т. е. элемент гомотопической группы $\pi_{n+k}(T\xi_k, \infty)$. Обратно, прообраз нулевого сечения $G_{\infty,k} \hookrightarrow T\xi_k$ при трансверсальном к нему отображении сферы $\mathbf{S}^{n+k} \to T\xi_k$ есть гладкое n-мерное подмногообразие в $\mathbf{S}^{n+k}$, а прообраз нулевого сечения при трансверсальной ему гомотопии $\mathbf{S}^{n+k} \times [0, 1] \to T\xi_k$ есть кобордизм таких многообразий.

Теорема [72]. *Группа $\mathfrak{R}_n(\Omega_n)$ классов (ориентированного) кобордизма замкнутых n-мерных многообразий изоморфна стабильной гомотопической группе $\lim\limits_{k\to\infty} \pi_{n+k}(T\xi_k)$ пространств Тома классифицирующих (ориентированных) векторных расслоений.*

Здесь знак $\lim$ означает следующее. Отображение $\mathbf{S}^{n+k} \to T\xi_k$ надстраивается до отображения $\mathbf{S}^{n+k+1} \to T(\xi_k \oplus 1)$ сферы в пространство Тома суммы расслоения ξ_k и одномерного тривиального расслоения. Эта сумма может быть индуцирована из ξ_{k+1}, что дает отображение $\mathbf{S}^{n+k+1} \to T(\xi_k)$. По возникающей последовательности, гомоморфизмов $\pi_{n+k}(T\xi_k) \to \pi_{n+k+1}(T\xi_{k+1})$ и берется предел.

Эта теорема сводит вычисление групп кобордизмов к чисто гомотопической задаче, которую в значительной степени удается решить.

Теорема [72].

1) *Кольцо* $\mathfrak{R}_* = \oplus \mathfrak{R}_n$ *изоморфно кольцу* $\mathbb{Z}_2[y_2, y_4, y_5, \ldots]$ *полиномов над* $\mathbb{Z}_2$ *от образующих* y_n *степеней* $n \neq 2^r - 1$.

2) *Кольцо* $\Omega_* = \oplus \Omega_n$ *изоморфно по модулю кручения кольцу полиномов над* $\mathbb{Z}$ *с образующими степеней* $4k$, $k = 1, 2, \ldots$

2.5. Группы лежандровых кобордизмов как гомотопические группы. Сопоставим лежандровой иммерсии многообразия L в $J^1\mathbb{R}^n$ тривиализацию комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}L$, как объяснено в примере п. 2.3.

Теорема ([47], [54]). *Это отображение является взаимно однозначным соответствием между множеством классов гомотопных лежандровых иммерсий* $L \hookrightarrow J^1\mathbb{R}^n$ *и множеством классов гомотопных тривиализаций расслоения* $T^{\mathbb{C}}L$.

Отсюда, как и в теории кобордизмов гладких многообразий, выводится

Теорема (Я. М. Элиашберг, см. [69]). *Группы классов лежандрова кобордизма изоморфны стабильным гомотопическим группам пространств Тома тавтологических расслоений над лагранжевыми грассманианами*:

$$\mathfrak{R}\mathbf{L}_n = \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}(T\lambda_k), \qquad \mathbf{L}_n = \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}(T\lambda_k^*).$$

Предельный переход соответствует последовательности вложений лагранжевых грассманианов, описанной в п. 1.4.

Аналогичное выражение групп кобордизмов через гомотопические группы (правда, более громоздких пространств) имеется и для других теорий лагранжевых и лежандровых кобордизмов[1], но эти гомотопические группы пока не вычислены.

Вычисление стабильных гомотопических групп пространств $T\lambda_k$ приводит к следующему уточнению теоремы п. 2.2.

Теорема [35]. *Отображение* $\theta\colon \mathfrak{R}\mathbf{L}_* \to \mathfrak{R}_*$, *сопоставляющее классу кобордизма иммерсированного лежандрова многообразия класс неориентированного кобордизма этого многообразия, является вложением градуированных колец и* $\mathfrak{R}_* = (\mathfrak{R}\mathbf{L}_*) \oplus \mathbb{Z}_2[y_2, \ldots, y_{2k}, \ldots]$.

[1]См. статью Я. М. Элвашберга в [69].

Следствие. *Класс неориентированного лежандрова кобордизма лежандровой иммерсии $L \hookrightarrow J^1\mathbb{R}^n$ зависит только от многообразия L.*

2.6. Группы лагранжевых кобордизмов. Эти группы, как правило, трудно обозримы. Вычислены лишь группы лагранжева кобордизма кривых на поверхностях [5]. Дело в том, что интеграл действия по замкнутой кривой на лагранжевом многообразии-кобордизме зависит лишь от гомологического класса кривой на нем. Если интегралы действия по базису 1-циклов на лагранжево иммерсированном замкнутом многообразии L рационально независимы, то пространство $H_1(L, \mathbb{Q})$ вместе с определяемой классом когомологий формы действия линейной вещественнозначной функцией на нем является инвариантом класса лагранжева кобордизма многообразия L.

Лагранжева иммерсия $L \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ наряду с отображением Гаусса $L \to \Lambda_n$, задает отображение $L \to K(\mathbb{R}, 1)$ в пространство Эйленберга – Маклейна (S. Eilenberg – S. MacLane) аддитивной группы вещественных чисел ($\pi_1(K(\mathbb{R}, 1)) = \mathbb{R}$, $\pi_k(K(\mathbb{R}, 1)) = 0$ при $k \neq 1$), определяемое гомоморфизмом фундаментальных групп $\pi_1(L) \to H_1(L, \mathbb{Q}) \to \mathbb{R}$. Пусть T_n — пространство Тома расслоения над $K(\mathbb{R}, 1) \times \Lambda_n^+$, индуцированного из тавтологического проекцией на второй сомножитель.

Теорема.[1] *Группа классов ориентированного лагранжева кобордизма в $T^*\mathbb{R}^n$ есть $\lim\limits_{k\to\infty} \pi_{n+k}(T_k)$.*

При $n = 1$ эта группа есть $\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$ — единственными (и независимыми) инвариантами класса лагранжева кобордизма замкнутой кривой на симплектической плоскости являются ее индекс Маслова и площадь области, ограниченной кривой [5].

§ 3. Характеристические числа

Здесь описаны дискретные инварианты класса лагранжева (лежандрова) кобордизма. Они возникают из когомологических классов лагранжевых грассманианов, но получают геометрическую интерпретацию при исчислении лагранжевых и лежандровых особенностей. Это обстоятельство проливает свет на алгебраическую природу классификации критических точек функций.

3.1. Характеристические классы векторных расслоений. При индуцировании векторного расслоения отображением базы в клас-

[1] См. статью Я. М. Элиашберга в [69].

сифицирующее пространство класс когомологий классифицирующего пространства определяет класс когомологий базы, называемый *характеристическим классом* расслоения. Исходный класс когомологий классифицирующего пространства называется универсальным характеристическим классом. Если двум расслоениям одинаковой размерности с общей базой отвечают различные характеристические классы, полученные из одного универсального, то эти расслоения неэквивалентны.

Отвечающие последовательностям вложений

$$G_{\infty,n} \hookrightarrow G_{\infty,n+1} \hookrightarrow \ldots, \quad G^+_{\infty,n} \hookrightarrow G^+_{\infty,n+1} \hookrightarrow \ldots,$$
$$\Lambda_n \hookrightarrow \Lambda_{n+1} \hookrightarrow \ldots, \quad \Lambda^+_n \hookrightarrow \Lambda^+_{n+1} \hookrightarrow \ldots$$

последовательности гомоморфизмов групп когомологий определяют стабильные группы когомологий соответствующих грассманианов.

Теорема ([61], [25]). *Градуированные кольца стабильных когомологий грассманианов следующие*:

1) $H^*(G^+, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[p_1, \ldots, p_k, \ldots]$ — *кольцо полиномов с рациональными коэффициентами от целочисленных классов Понтрягина* p_k *степени* $4k$;

2) $H^*(G, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_k, \ldots]$ — *кольцо полиномов над полем* $\mathbb{Z}_2$ *от классов Штифеля – Уитни (E. Stiefel – H. Whitney)* w_k *степени* k;

3) $H^*(\Lambda^+, \mathbb{Q})$ — *внешняя алгебра над* $\mathbb{Q}$ *с целочисленными образующими степеней* $4k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

4) $H^*(\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ — *внешняя алгебра над* $\mathbb{Z}_2$ *от классов Штифеля – Уитни.*

Замечание 1. Ядро эпиморфизма $H^*(G, \mathbb{Z}_2) \to H^*(\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ определяемого вложениями $\Lambda_n \hookrightarrow G_{2n,n} \hookrightarrow G_{\infty,n}$, есть идеал, порожденный квадратами [26]. Отметим, что размерность пространства $H^k(\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ над полем $\mathbb{Z}_2$ равна числу разбиений k в сумму различных натуральных слагаемых.

Замечание 2. Каждый ненулевой элемент перечисленных в теореме колец когомологий определяет нетривиальный универсальный характеристический класс, различающий классы стабильной эквивалентности (ориентированных) векторных расслоений и (ориентированных) векторных расслоений с тривиализованной комплексификацией соответственно.

3.2. Характеристические числа классов кобордизма.

Лемма. *Значение n-мерного стабильного характеристического класса касательного расслоения n-мерного замкнутого многообразия на его фундаментальном цикле зависит лишь от класса кобордизма этого многообразия.*

Действительно, ограничение касательного расслоения многообразия на его край изоморфно сумме одномерного тривиального расслоения и касательного расслоения края, т. е. стабильно эквивалентно последнему. Значение стабильного характеристического класса касательного расслоения многообразия на фундаментальном цикле края равно нулю, так как этот цикл гомологичен нулю.

Таким образом, каждый стабильный универсальный n-мерный характеристический класс определяет *характеристическое число* замкнутого n-мерного многообразия — инвариант класса кобордизма этого многообразия. Аналогично, характеристические числа лагранжевой (лежандровой) иммерсии в $T^*\mathbb{R}^n(J^1\mathbb{R}^n)$ определяются n-мерными характеристическими классами тривиализации комплексифицированного касательного расслоения иммерсируемого многообразия и являются инвариантами класса лагранжева (лежандрова) кобордизма. Очевидно, характеристическое число суммы классов кобордизма равно сумме характеристических чисел слагаемых.

Теорема [35].

1) *Задаваемый характеристическими числами Штифеля–Уитни гомоморфизм групп $\Re\mathbf{L}_n \to H_n(\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ является вложением.*

2) *Аналогичный гомоморфизм $\mathbf{L}_n \to H_n(\Lambda^+, \mathbb{Z})$ является изоморфизмом по модулю кручения.*

Следствие. *Класс неориентированного лежандрова кобордизма лежандровой иммерсии в $J^1\mathbb{R}^n$ определяется числами Штифеля–Уитни иммерсируемого многообразия.*

Замечание 1. Аналогичная теорема справедлива для теории кобордизмов замкнутых многообразий.

Замечание 2. Число разбиений натурального k в сумму нечетных слагаемых — размерность подпространства H_k градуированного кольца $\oplus H_k$ полиномов над $\mathbb{Z}_2$ от образующих нечетной степени — равна числу разбиений k на различные слагаемые (разобьем каждое четное слагаемое в сумму 2^r одинаковых нечетных ...).

Замечание 3. Между числами Штифеля–Уитни лежандровых иммерсий имеются соотношения. Например, индекс Маслова замкнутой лежандровой кривой в $J^1\mathbb{R}$ четен, т.е. характеристическое число $w_1=0$. Наоборот, класс ориентированного лежандрова кобордизма такой кривой определяется классом Маслова — удвоенной образующей группы $H^1(\Lambda^+, \mathbb{Z})$, так что $\mathbf{L}_1 \to H_1(\Lambda^+, \mathbb{Z})$ — изоморфизм.

Замечание 4. Умножение характеристических классов вместе с умножением двойственных к ним объектов — классов кобордизма — задают в $\mathbf{L}_* \otimes \mathbb{Q}$ структуру алгебры Хопфа: коумножение $\mathbf{L}_* \to \mathbf{L}_* \otimes \mathbf{L}_*$ (по модулю кручения) является гомоморфизм алгебр.

Замечание 5. Следствие не имеет аналога в ориентированном случае: классы Понтрягина касательного расслоения многообразия, допускающего лагранжеву иммерсию в $T^*\mathbb{R}^n$, нулевые.

3.3. Комплексы особенностей. Разобьем пространство ростков гладких функций одной переменной в критической точке 0 с нулевым критическим значением (точнее — пространство струй таких функций достаточно высокого порядка) на неособые страты — классы R-эквивалентности (см. § 2, гл. 5) $A_1^{\pm}$, A_2, $A_3^{\pm}$, A_4, ... и класс, содержащий нулевую функцию. Назовем страт конечной коразмерности коориентируемым, если его нормальное расслоение обладает ориентацией, инвариантной относительно действия группы ростков диффеоморфизмов в пространстве ростков функций. Некоориентируемыми оказываются страты A_{4k-1}^{+} и только они. Например, трансверсаль к страту A_3^+ в точке x^4 можно взять в виде $x^4+\lambda_1x^3+\lambda_2x^2$; замена $x\mapsto -x$ меняет ориентацию трансверсали. Определим комплекс ω, группа k-цепей которого состоит из формальных целочисленных линейных комбинаций коориентированных стратов коразмерности k. Смена коориентации меняет знак страта. Кограничный оператор δ определяется примыканиями стратов как обычный оператор взятия границы цепей. Заметим, что некоориентируемый страт входит в границу коориентируемого с нулевым коэффициентом, поэтому оператор δ корректно определен и $\delta^2=0$. Комплекс ν, не учитывающий коориентацию стратов, состоит из формальных сумм с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2$ всех стратов и снабжается оператором взятия границ страта по модулю 2.

Мы использовали классификацию критических точек функций на прямой только как иллюстрацию. В действительности нам нужны универсальные комплексы ω и ν, определяемые аналогично по дискретной стратификации пространств ростков функций произвольного числа переменных на неособые страты, инвариантные относительно стабильной R-эквивалентности ростков.

Пусть задана лагранжева иммерсия $L \hookrightarrow T^*M^n$ общего положения. Лагранжева проекция в M^n определяет стратификацию многообразия L по типам особенностей лагранжева отображения $L \to M^n$ в соответствии со стратификацией пространства ростков функций.

Теорема [8]. *Каждому (коориентированному) циклу универсального комплекса $\nu(\omega)$ отвечает (коориентированный) цикл замкнутого (ориентированного) многообразия L с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2(\mathbb{Z})$. Класс гомологии комплекса $\nu(\omega)$ определяет класс когомологий многообразия L с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2(\mathbb{Z})$ — индекс пересечения циклов на L с соответствующим (коориентированным) циклом особенностей.*

Определяемые классами гомологии универсальных комплексов ω и ν классы когомологий на L называются характеристическими классами лагранжевой иммерсии. Эта конструкция обобщает конструкцию класса Маслова п. 1.3. Значение характеристического класса старшей размерности на фундаментальном цикле многообразия L определяет характеристическое число — инвариант класса лагранжева кобордизма. Соответствующий цикл особенностей — это просто набор точек со знаками, определяемыми совпадением или несовпадением коориентации точки с ориентацией многообразия, а характеристическое число — количество таких точек, в ориентированном случае — с учетом этих знаков, а в неориентированном — по модулю 2.

Имеются подобные конструкции [8] характеристических классов и чисел в теории лежандровых кобордизмов. Соответствующие универсальные комплексы ω и ν коориентированных и некоориентированных особенностей лежандровых отображений определяются по неособой стратификации пространств ростков (коориентированных) гиперповерхностей в особой точке, инвариантной относительно группы ростков диффеоморфизмов объемлющего пространства, для теории лежандровых кобордизмов в PT^*M^n (ST^*M^n или J^1M^n соответственно).

Характеристические классы лагранжевых иммерсий в $T^*\mathbb{R}^n$ или лежандровых иммерсий в $J^1\mathbb{R}^n$, определяемые классами когомологий универсальных комплексов, могут быть индуцированы из подходящих классов когомологий лагранжевых грассманианов при отображении Гаусса.

Теорема [69]. *Существуют естественные гомоморфизмы*

$$H^*(\omega) \to H^*(\Lambda^+, \mathbb{Z}), \qquad H^*(\nu) \to H^*(\Lambda, \mathbb{Z}_2).$$

Действительно, рассмотрим пространство струй J^N высокого порядка N ростков в нуле (ориентированных) лагранжевых подмногообразий в $T^*\mathbb{R}^n$. Пространство J^1 есть лагранжев грассманиан $\Lambda_n(\Lambda_n^+)$. Расслоение $J^N \to J^1$ имеет стягиваемый слой, т. е. J^N гомотопически эквивалентно J^1. Лагранжева проекция $T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ позволяет стратифицировать пространство J^N по типам особенностей ростков лагранжевых отображений. Подобно тому, как класс Маслова лагранжевой иммерсии общего положения $L \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n$ определяется прообразом цикла $\Sigma \subset J^1$ (см. п. 1.4) при отображении Гаусса, каждый цикл особенностей на L является прообразом соответствующего цикла в пространстве J^N при отображении, сопоставляющем точке на L N-струю лагранжевой иммерсии в этой точке.

3.4. Сосуществование особенностей. Группы когомологий универсальных комплексов ν и ω вычислены для стратов коразмерности меньше либо равной 6. Соответствующие классы стабильной R-эквивалентности ростков функций следующие: $A_{2k-1}^{\pm}$, A_{2k} $(k = 1, 2, 3)$, $D_k^{\pm}$ $(k = 4, 5, 6, 7)$, E_6, E_7, E_8, где классы A, D, E — простые (см. п. 2.3, гл. 5), а P_8 — унимодальный класс ростков $x^3 + ax^2z \pm$ $\pm xz^2 + y^2z$ (a — модуль, $a^2 \neq 4$ в случае знака $+$, см. [9]). Некоориентируемыми оказываются страты $A_{4k-1}^{\pm}$ и $D_k^{\pm}$. Результаты вычисления групп когомологий приведены в таблице 2.

Таблица 2

теория	k	1	2	3	4	5	6
T^*M,	$H^k(\omega)$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
J^1M	образующая	A_2	–	–	A_5	A_6 или E_6	P_8
или	нули	–	–	–	$2A_5$	$A_6 - E_6$	$E_7 + 3P_8$
$3T^*M$	$H^k(\nu)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$
	образующие	A_2	A_3	A_4 или D_4	A_5	A_6 или D_6	A_7, E_7 или P_8
	$H^k(\omega)$	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$
	образующие	–	–	–	A_5	E_6	E_7, P_8
PT^*M	$H^k(\nu)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$
	образующие	A_2	A_3	A_4, D_4	A_5	A_6, D_6, E_6	A_7, E_7, P_8

Когомологическое произведение $\smile$ характеристических классов — тоже характеристический класс. Оказывается, на этом пути не возникает новых характеристических классов.

Теорема. *На любом замкнутом лагранжево иммерсированном многообразии верны следующие мультипликативные соотношения между характеристическими классами:*

для коориентированных классов $A_2 \smile A_2 = 0$, $A_2 \smile A_6 = 3P_8$, $P_8 \smile P_8 = 0$ *по модулю кручения;*

для некоориентированных классов $A_2 \smile A_3 = A_4 = D_4$, $A_2 \smile A_6 = E_7 = P_8$, $A_2 \smile A_7 = E_8 = D_8 = A_8$, $A_3 \smile A_5 = E_7 = P_8$ *и остальные произведения размерности* $\leqslant 6$ *образующих из таблицы* 2 *нулевые.*

Соотношения между циклами особенностей в когомологиях универсальных комплексов накладывают ограничения на сосуществование особенностей. Так, на любом замкнутом ориентированном лагранжевом многообразии подходящей размерности, приведенном в общее положение по отношению к лагранжевой проекции, равно нулю число взятых с учетом знаков точке A_5, а также числа $A_6 - E_6$ и $E_7 + 3P_8$, а на неориентированном четны числа $A_4 + D_4$, D_5, D_6, $A_6 + E_6$, D_7, $E_7 + P_8$, $A_8 + D_8$ и $A_8 + E_8$.

Не все классы когомологий универсальных комплексов порождают нетривиальные характеристические числа лагранжевых или лежандровых иммерсий. Например, число точек A_3 на общей замкнутой лежандровой поверхности в J^1M^2 всегда четно, поскольку точки A_3 замкнутого волнового фронта общего положения попарно соединяются выходящими из них линиями типа (A_1A_1) самопересечений волнового фронта. Рассмотрение точек пересечений различных стратов волновых фронтов приводит к новым характеристическим числам. Например, лежандровыми характеристическими числами оказываются четности количеств точек (A_1, A_2), (A_1, A_4), (A_2, A_4), (A_1, A_6), (A_1, A_2, A_4) на общих фронтах подходящей размерности. Перечисленные классы являются коциклами определенного в [9] универсального комплекса мультиособенностей. Из вычислений в этом комплексе получается много следствий о сосуществовании мультиособенностей. Например, на замкнутом фронте общего положения в J^0M^2 четно число (A_1, A_2) точек протыкания фронта своим ребром возврата. Оказывается, произведение когомологических классов объемлющего фронт пространства, двойственных фронту и замыканию его ребра возврата, двойственно замыканию страта (A_1, A_2). Отсюда вытекает сделанное утверждение, поскольку для открытого трехмерного многообразия J^0M^2 это произведение нулевое. Многомерные обобщения этого результата см. в [3].

Как уже отмечалось в § 1, класс Маслова A_2 лагранжевой иммерсии в $T^*\mathbb{R}^n$ индуцируется при отображении Гаусса из образующей группы $H^1(\Lambda^+)$.

Теорема. *На ориентированном компактном лагранжевом подмногообразии в $T^*\mathbb{R}^n$ характеристические классы A_6 и P_8 совпадают по модулю кручения с классами, индуцируемыми из утроенной образующей группы $H^5(\Lambda^+)$ и произведения класса Маслова на эту образующую соответственно, а на неориентированном — характеристические классы A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, E_7 совпадают с классами Штифеля–Уитни w_1, w_2, w_1w_2, w_1w_3, w_2w_3, $w_1w_2w_3$ соответственно.*

Следствие. *Взятое с учетом знаков число особенностей A_6 на лагранжевом ориентированном многообразии общего положения в $T^*\mathbb{R}^5$ кратно трем.*

В заключение отметим почти полный параллелизм начал иерархий вырожденных критических точек функций и «допустимых последовательностей» Стинрода (N. Steenrod) [73] $(x_1 \geqslant 2,\ x_2 \geqslant 4,\ x_3 \geqslant \ldots)$:

$A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 \ldots$	1	2	3	4	5	6	7 …
$D_4, D_5, D_6, D_7, D_8 \ldots$			2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1 …
$E_6, E_7, E_8 \ldots$					?	4, 2	5, 2 …
$P_8 \ldots$							4, 2, 1 …

(число членов последовательности равно корангу особенности, сумма — коразмерности орбиты; нехватка E_6 объясняется, быть может, соотношением $A_6 \sim E_6$ в комплексе ω).

Литература

Помимо цитированной литературы в список включены классические труды и учебники по динамике [17], [38], [42], [43], [50], [56], [65], [66], [78], несколько современных монографий [30], [44], [48], [55], [71], [74], а также работы, относящиеся к совсем или почти не затронутым в обзоре, но связанным с его предметом вопросам — [7], [40], [53], [59], [64], [70], [73]. Сборники [67], [69] дают хорошее представление о направлениях нынешних исследований. Подробные изложения основ симплектической геометрии — с различных точек зрения — можно найти в [1], [48], а отдельных ее разделов в [2], [6], [24]. Из библиографических источников по нашей теме отметим [30].

[1] В. И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1974, 431 с.

[2] В. И. Арнольд. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Ижевск, 2000, 400 с.

[3] В. И. Арнольд. *Особенности систем лучей.* Успехи мат. наук, 1983, 36, № 2, 77–147.

[4] В. И. Арнольд. *Особенности в вариационном исчислении.* В сб. «Современные пробл. математики (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1983, 22, 3–55.

[5] В. И. Арнольд. *Лагранжевы и лежандровы кобордизмы.* Функц. анализ и его прил., 1980, **14**, № 3, 1–13; № 4, 8–17.

[6] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. *Особенности дифференцируемых отображений.* Т. 1. М.: Наука, 1982, 304 с.

[7] А. Н. Варченко, А. Б. Гивенталь. *Отображение периодов и форма пересечений.* Функц. анализ и его прил., 1982, **16**, № 2, 7–20.

[8] В. А. Васильев. *Характеристические классы лагранжевых и лежандровых иммерсий, дуальные к особенностям каустик и волновых фронтов.* Функц. анализ и его прил., 1981, **15**, № 3, 10–22

[9] В. А. Васильев. *Самопересечения волновых фронтов и лежандровы (лагранжевы) характеристические числа.* Функц. анализ и его прил., 1982, **16**, №2, 68–69.

[10] Д. М. Галин. *Версальные деформации линейных гамильтоновых систем.* Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1975, **1**, 63-74.

[11] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман. *Гамильтоновы операторы и классические уравнения Янга – Бакстера.* Функц. анализ и его прил., 1982, **16**, №4, 1–9.

[12] И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский. *О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений.* Успехи мат. наук, 1955, **10**, №1, 3–40.

[13] В. Г. Дринфельд. *Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл уравнений Янга – Бакстера.* Докл. АН СССР, 1983, **268**, №2, 285–287.

[14] М. Я. Житомирский. *Конечно определенные ростки 1-форм ω, $\omega|_0 \neq 0$ исчерпываются моделями Дарбу и Мартине.* Функц. анализ и его прил., 1985. **19**, №1, 71–73.

[15] А. А. Кириллов. *Элементы теории представлений.* М.: Наука, 1972, 336 с.

[16] А. А. Кириллов. *Локальные алгебры Ли.* Успехи мат. наук. 1976, **31**, №4, 57–76.

[17] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Механика.* М.: Наука, 1973, 208 с.

[18] В. В. Лычагин. *Локальная классификация нелинейных уравнений с частными производными первого порядка.* Успехи мат. наук, 1975, **30**, №1, 101–171.

[19] В. П. Маслов. *Теория возмущений и асимптотические методы.* М.: МГУ, 1965, 412 с.

[20] В. И. Матов. *Унимодальные и бимодальные ростки функций на многообразии с краем.* Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1981, **7**, 174–189.

[21] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. *Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями.* Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1980, **20**, 5–54.

[22] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли.* Изв. АН СССР, 1978, **42**, № 2, 396–415.

[23] М. А. Семенов-Тян-Шанский. *Что такое классическая r-матрица.* Функц. анализ и его прил., 1983, **17**, № 4, 17–33.

[24] А. Т. Фоменко. *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.* Ижевск, 1999, 252 с.

[25] Д. Б. Фукс. *О характеристических классах Маслова – Арнольда.* Докл. АН СССР, 1968, **178**, № 2, 303–306.

[26] Д. Б. Фукс. *Когомологии по модулю 2 группы кос.* Функц. анализ и его прил., 1970, **4**, № 2, 62–73.

[27] И. Г. Щербак. *Фокальное множество поверхности с краем и каустики групп, порожденных отражениями B_k, C_k, F_4.* Функц. анализ и его прил., 1984, **18**, № 1, 90–91.

[28] И. Г. Щербак. *Двойственность краевых особенностей.* Успехи мат. наук, 1984, **39**, № 2, 207–208.

[29] О. П. Щербак. *Особенности семейства эвольвент в окрестности точки перегиба кривой и группа H_3, порожденная отражениями.* Функц. анализ. и его прмл., 1983, **17**, № 4, 70–72.

[30] R. Abraham, J. Marsden. *Foundations of mechanics.* N.-Y., Benjamin – Cummings, 1978, 641 p.

[31] V. I. Arnold. *Wave fronts evolution and equivariant Morse lemma.* Cornmun. Pure and Appl. Math., 1976, **29**, № 6, 557–582.

[32] V. I. Arnold. *Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle.* Ergodic theory and Dynamical Systems, 1982, **2**, № 3, 301–309.

[33] M. Atiyah. *Convexity and commuting Hamiltonians.* Bull. London Math. Soc., 1982, **14**, № 1, 1–15.

[34] M. Atiyah, R. Bott. *The moment map and equivariant cohomology.* Topology, 1984, **23**, № 1, 1–23.

[35] M. Audin. *Quelques calculs en cobordisme lagrangien.* Prépublication. Paris, Universile de Paris — Sud, 1984, 37 p.

[36] N. Bourbaki. *Groupes et algebres de Lie*, ch. 4–6. Paris, Hermann. 1968, 288 pp. (Пер. на рус. яз.: Н. Бурбаки. *Группы и алгебры Ли*, гл. 4–6. М.: Мир, 1978, 331 с.)

[37] E. Brieskorn. *Singular elements of semisimple algebraic groups.* Actes Congr. Intern. Math. Nice, 1970, 2, Paris, 1971, 279–284.

[38] E. Cartan. *Lecons sur les invariants integraux.* Paris, Hermann, 1922, 210 p. (Пер. на рус. яз.: Э. Картан. *Интегральные инварианты.* М.–Л.: ГИТТЛ, 1940, 216 с.)

[39] J. F. Conn. *Linearization of analytic Poisson structures.* Ann. Math., 1984, **119**, 577–601.

[40] C. Croke, A. Weinstein. *Closed curves on convex hypersurfaces and periods of nonlinear oscillations.* Invent. Math. 1981, **64**, №2, 199–202.

[41] J. J. Duistermaat, G. J. Heckman. *On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space.* Invent. Math., 1982, **69**, №3, 269–268.

[42] L. Euler. *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable.* Histoire de l'Academie Royalé des Sciences, Berlin, 1758–1785, **14**, 154–193.

[43] J. W. Gibbs. *Graphical methods in the thermodinamics of fluids.* Transactions of Connecticutt Academy, 1973, **2**, 309–342. (Пер. на рус. яз.: Дж. В. Гиббс. *Термодинамика. Статистическая механика.* М.: Наука, 1982, 584 с.)

[44] C. Godbillon. *Géometric differentielle et mécanique analytique.* Paris, Hermann, 1974, 180 p. (Пер. на рус. яз.: К. Годбийон. *Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.* М.: Мир, 1978, 188 с.)

[45] M. Golubitsky, D. Tischler. *On the local stability of differential forms.* Trans. Amer. Math. Soc., 1976, **223**, №2, 205–21.

[46] M. Golubitsky, D. Tischler. *An example of moduli for singular eympletic forms.* Invent. math. 1977, **38**, №3, 219–225.

[47] M. Gromov. *A topological technique for the construction of solutions of differential equations.* Actes Congres Intern. Math. Nice, 1970, **2**, Paris, 1971, 221–225.

[48] V. Guillemin, S. Sternberg. *Geometric asymptotics.* Providence, Rhode Island, 1977, 474 p. (Пер. на рус. яз.: В. Гийемин, С. Стернберг. *Геометрические асимптотики.* М.: Мир, 1981, 500 с.)

[49] V. Guillemin, S. Sternberg. *Geometric quantisation and multiplicities of group representational.* Invent. math., 1982, **67**, №2, 515–538.

[50] W. R. Hamilton. *Mathematical papers.* Cambridge Univ. Press, 1940, 656 p.

[51] C. G. Jacobi. *Vorlesungen über Dynamik.* Berlin, G. Reimer, 1884, 578 s. (Пер. на рус. яз.: К. Г. Якоби. *Лекции по динамике.* М.: ОНТИ, 1936, 271 с.)

[52] F. Klein. *Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert.* Berlin, 1926, 401 p. (Пер. на рус. яз.: Ф. Клейн. *Лекции о развитии математики в* XIX *столетии.* Л.: ОНТИ, 1937, 432 с.)

[53] B. Kostant. *Quantisation and unitary representations.* Springer, Berlin, Lect. Notes Math., 1970, **170**, 87–208.

[54] J. A. Lees. *On the classification of Lagrange immersions.* Duke Math. J, 1976, **43**, № 2, 217–224.

[55] J. Leray. *Analyse lagrangienne et mecanique quantique.* Strasbourg, 1978, 298 p. (Пер. на рус. яз.: Ж. Лере. *Лагранжев анализ и квантовая механика.* М.: Мир, 1981, 262 с.)

[56] S. Lie. *Theorie des Transformationsgruppen.* Leipzig, Zweiter Abschnitt. B. G. Teubner, 1890, 554 S.

[57] G. Lion, M. Vergne. *The Well representation, Maslov index and theta series.* Boston, Birkhauser, 1980, 337 p. (Пер. на рус. яз.: Ж. Лион, М. Вернь. *Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды.* М.: Мир, 1983, 216 с.)

[58] I. Martinet. *Sur les singularities des formes differentielles.* Ann. Inst. Fourier. 1970, **20**, № 1, 95–178.

[59] R. Melrose. *Equivalence of glancing hypersurfaces.* Invent. Math., 1976, **37**, № 3, 165–192.

[60] J. Milnor. *Morse theory.* Princeton Univ. Press, 1963, 184 p. (Пер. на рус. яз.: Дж. Милнор. *Теория Морса.* М.: Мир, 1965, 184 с.)

[61] J. Milnor, J. Stasheff. *Characterisitic classes.* Princeton Univ. Press, 1974, 270 p. (Пер. на рус. яз.: Дж. Милнор, Дж. Сташеф. *Характеристические классы.* М.: Мир, 1979, 372 с.)

[62] J. Moser. *On the volume elements on manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc., 1966, **120**, № 2, 280–296.

[63] Nguyên hûu Dûc, Nguyên tiên Dai. *Stabilité de l'interaction géométrique entre deux composantes.* C. r. Acad. sci. Paris, 1980, **291**, 113–116.

[64] S. Pnevmaticos. *Structures hamilitoniennes en présence de contraintes.* C. r. Acad. sci. Paris, 1979, **289**, 799–802.

[65] H. Poincaré. *Les methodes nouvelles de la Mecanique celeste.* t. 1–3, Paris, Gauthier – Villars, 1882, 1883, 1899, 800 p. (Пер. на рус. яз.: А. Пуанкаре. *Избранные труды.* Т. 1. М.: Наука, 1971, 771 с.)

[66] S. D. Poisson. *Traite de mecanique.* Paris, 1833, 497 p.

[67] Proceedings of the UVTAM-ISIMM Symposium on modern developments in analytical mechanics. Torino, 1982, v. 1, 2. Torino, 1983, 858 p.

[68] R. Roussarie. *Modéles locaux de champs et de formes.* Astérisque, 1975, **30**, 99 p.

[69] Seminaire Sud – Rodanien de géometric. T. 1–4, Paris, Hermann, 1964, 490 p.

[70] S. Smale. *Topology and Mechanics.* Invent. Math., 1970, **10**, № 4, 306–311, **11**, № 1, 45–64 (Пер. на рус. яз.: С. Смейл. *Топология и механика.* Успехи мат. наук, 1972, 27, № 2, 77–133.)

[71] J. M. Souriau. *Structure des systémes dynamiques.* Paris, 1970, 414 p.

[72] R. Thom. *Quelques proprietes des varietee differentiables.* Comment. math. helv., 1954, *28*, 18–86 (Пер. на рус. яз.: Р. Том. *Некоторые свойства в целом дифференцируемых многообразии.* В кн.: *Расслоенные пространства.* М.: ИЛ, 1968, 291–348.)

[73] D. Tischler. *Closed 2-forms and an embedding theorem for symplectic manifolds.* J. Different. Geom., 1977. **12**, № 1, 229–235.

[74] A. Weinstein. *Lectures on symplectic manifolds.* Providence, Rhode Island, 1977, 48 p.

[75] A. Weinstein. *The local structure of Poisson manifolds.* J. Different. Geom., 1983, **18**, № 2, 523–557.

[76] H. Weyl. *The classical groups.* Princeton Univ. Press. 1946, 410 p. (Пер. на рус. яз.: Г. Вейль. *Классические группы. Их инварианты и представления.* М.: ИЛ, 1947, 408 с.)

[77] J. Williamson. *On an algebraic problem, concerning the normal forms of linear dinamical systems.* Amer. J. Math., 1936, **58**, № 1, 141–163.

[78] E. T. Wittaker. *A treatise on the analytical dynamicis of particles rigid bodies.* Cambridge Univ. Press. 1959, 456 p.

Владимир Игоревич Арнольд

Александр Борисович Гивенталь

Симплектическая геометрия

Дизайнер *М. В. Ботя*
Компьютерная подготовка: *С. В. Высоцкий*
И. В. Рылова
Компьютерная графика *В. С. Княжин*
Корректор *М. А. Ложкина*

Лицензия ЛР № 020411 от 16.02.97. Подписано к печати 21.03.00.
Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 9,77. Уч. изд. л. 10,23.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.
Заказ № 475. Тираж 1000 экз.

Издательский дом «Удмуртский университет»,
426011, г. Ижевск, ул. Майская, 23.

Типография Удмуртского госуниверситета,
426034, ул. Университетская, 1, корп. 4.